KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO 3 — ROČNÍK 27
INTERNET http://matik.strom.sk

Ho ho hó

Vianočné medovníky už rozvoniavajú po celom dome. Stromček s ozdobami sa pýta, aby sme ho znovu oprášili. Von sa k moci dostáva pani zima a posiela k nám chladný a predsa príjemný sneh. A okrem prázdnin sa k vám dostalo aj ďalšie číslo MATIKa. Okrem darčekov pod stromčekom sa môžete tešiť aj na zimné sústredenie.

Vaši vedúci MATIKa

Ako bolo

Lomihlav Ako je už zvykom, aj tento rok sme sa opäť stretli v piatok 29.11.2013 v hojnom počte, aby sme si lámali hlavy nad hŕbou príkladov. Najlepšie sa darilo družstvu z Gymnázia Alejová, ktoré zviedlo tesný súboj s družstvom zo ZŠ Krosnianska a trojicu najlepších ukončilo ďalšie družstvo z Gymnázia Alejová. Tie si vybojovali nielen pozvánku na sústredenie MATIKa, ale aj ďalšie originálne ceny. Nuž a kým všetci v napätí čakali na už spomínané výsledky, bola pre všetkých účastníkov pripravená hra, kde sa dali s trochou snahy a kreativity získať sladké odmeny. Tak ak ste sa bavili aspoň tak dobre ako my, tak dúfame, že sa vidíme aj o rok.

Ako bude

Maxiklub Chceš sa schovať pred zimou, či pokecať s niekým o neodolateľnej vôni medovníkov zo špajze? Príď na vianočný Maxiklub, ktorý sa bude konať v sobotu 21.12.2013 od 13:00, na Jesennej 5 v Košiciach, miestnosť P19. Nájdeš tam kopu svojich kamarátov a vedúcich, a samozrejme dobrú náladu. Budú ťa čakať aj nejaké tie dobroty a možno aj kapustnica. Nezabudni si so sebou zobrať všetky nové historky, či dobrý koláčik :)

Vzorové riešenia 2. série úloh

1

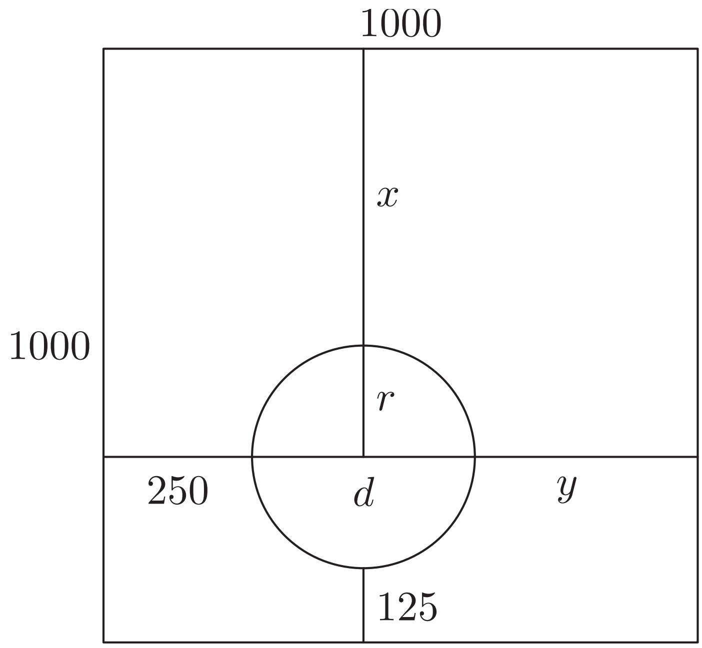
opravovali **Henka Micheľová** a **Rišo Trembecký**

najkrajšie riešenia: Martin Melicher

82 riešení

Zadanie Pri prvej hre hádzali frisbee. Na ihrisku bol štvorec s obvodom 4000 $\mathcal{MATIK}$metrov, ktorý stačil na pristátie lietajúceho taniera (tanier mal tvar kruhu). Keďže Holub hádzal frisbee prvýkrát, netrafil presne do stredu. Od najbližšieho okraja bol jeho tanier vzdialený 125 $\mathcal{MATIK}$metrov, od susedného okraja 250 $\mathcal{MATIK}$metrov a od najvzdialenejšieho okraja štvorca bol vzdialený 500 $\mathcal{MATIK}$metrov. Ako ďaleko bol od štvrtého okraja štvorca a aký polomer mal lietajúci tanier?

Vzorové riešenie Keďže vieme, že obvod štvorca je 4000 $\mathcal{MATIK}$metrov, strana (a) bude štvrtina obvodu, čiže 1000 $\mathcal{MATIK}$metrov.



Teraz sa pozrieme na obrázok. Máme na ňom označené dve vzdialenosti frisbee od strán (x a y) a vieme, že jedna z nich je dlhá 500 $\mathcal{MATIK}$metrov. Okrem toho vieme, že súčet vzdialeností frisbee od dvoch protiľahlých strán a jeho priemeru (d) musí byť 1000 $\mathcal{MATIK}$metrov (ležia na jednej úsečke). Takže platí:

$$x + d + 125 = y + d + 250$$

Po úprave dostávame $x = y + 125$. Z toho viditeľne $x > y$, takže x musí byť 500 $\mathcal{MATIK}$metrov, lebo je to najväčšia vzdialenosť. Potom $y = 500 - 125 = 375$ $\mathcal{MATIK}$metrov.

Teraz už len dorátame polomer frisbee (polovica priemeru): $d = (1000 - 125 - 500) = 375$ $\mathcal{MATIK}$metrov. Takže polomer je: $r = \frac{375}{2} = 187,5$ $\mathcal{MATIK}$metrov.

Polomer frisbee je 187,5 $\mathcal{MATIK}$metrov a frisbee je od tretej strany vzdialené 375 $\mathcal{MATIK}$metrov.

Komentár Väčšina z vás prišla k správnemu výsledku. Keďže táto úloha bola veľmi ľahká, tak sme museli strhávať body aj za maličkosti. Niektorí stratili body za to, že nepopísali, ako prišli k dĺžke strany 1000 MATIKmetrov (stačilo napísať, že ak obvod je 4000 MATIKmetrov a je to štvorec, tak potom strana je 1000 MATIKmetrov). Potom ďalšie body, ktoré sme museli strhávať, boli za to, že ste nedokázali, že 500 MATIKmetrov musí byť oproti 125 MATIKmetrov. Vo vzorovom riešení je aj dôkaz tohto tvrdenia, ale v tejto úlohe sme uznávali aj tvrdenie, že oproti najmenšej vzdialenosti musí byť najväčšia vzdialenosť, čo je v štvorci všeobecná pravda. Ak táto veta však v riešení nebola, museli sme vám strhnúť body. Ďalšia možnosť, ako vyriešiť tento problém, bola prejsť obe možnosti. Inak ste úlohu vyriešili veľmi dobre.

2 opravovali **Kristína Mišlanová** a **Janka Baranová**

najkrajšie riešenie: Martin Melicher, Lenka Kopfová, Matej Hanus

82 riešení

Zadanie Drozdína povedala túto delikátnu informáciu Baranči. V Barančinej družinke je 6 ľudí (vrátane Baranči). Medzi nimi je 11 priateľstiev (priateľstvo je obojstranné, teda ak ja som priateľ s Barančou, tak aj ona je priateľ so mnou a tento náš vzťah počítame ako jedno priateľstvo). Ak sa niekto dozvie nejakú klebetu, povie ju všetkým svojim priateľom. Dokážte, že túto klebetu budú vedieť všetci ľudia z Barančinej družinky.

Vzorové riešenie To, že sa túto informáciu dozvedeli všetci ľudia v družinke, dokážeme sporom. To znamená, že budeme predpokladať, že existuje človek, ku ktorému sa táto informácia nedostala, a neskôr zistíme, že to nie je možné (dôjdeme k nezmyslu). Na to, aby sa k niekomu informácia nedostala, je potrebné, aby buď nemal žiadneho priateľa, alebo aby sa priatelil iba s ľuďmi, ku ktorým sa táto informácia taktiež nedostala. Poďme si teda rozobrať obidve tieto možnosti.

1.) Predpokladajme, že existuje človek, ktorý nemá v družinke žiadneho priateľa. Ak by takýto človek existoval, tak by to znamenalo, že všetkých 11 priateľstiev by muselo byť medzi zvyšnými piatimi členmi družinky. Piati ľudia, aj keby sa priatelili každý s každým, však medzi sebou vedia vytvoriť iba $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ priateľstiev. Z čoho vyplýva, že potrebujeme, aby aj šiesty človek tvoril aspoň jedno priateľstvo. Čiže sme zistili, že každý člen družinky musí mať aspoň jedného priateľa. A táto možnosť teda nikdy nemôže nastať.

2.) Človek, ku ktorému chceme, aby sa informácia nedostala, sa musí priateliť iba s ľuďmi, ku ktorým sa táto informácia taktiež nedostala, pretože v opačnom prípade by mu to ako priatelia museli povedať. Čo znamená, že nikto z tejto skupiny nemôže mať žiadneho priateľa v skupine, kde je Baranča s jej priateľmi a priateľmi týchto priateľov atď... teda ľuďmi, ktorí danú informáciu vedia. Ľudí teda delíme do dvoch skupín a priateliť sa môžu len v rámci nich. Teraz postupne rozoberieme, koľko ľudí by teoreticky mohlo byť v skupine, ku ktorým sa táto informácia nedostane. Vieme, že tam budú minimálne 2 a maximálne 5, pretože samotná Baranča už informáciu má.

• **A)** Ak by v tejto skupine boli dvaja ľudia, tak medzi nimi vznikne jedno priateľstvo a v skupine zvyšných štyroch vznikne $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ priateľstiev. Čo je dokopy len 7 priateľstiev, čo nám nestačí.

• **B)** Ak by boli v tejto skupine traja ľudia, tak medzi nimi vzniknú $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ priateľstvá a medzi zvyšnými tromi taktiež 3 priateľstvá. To bude dokopy 6 priateľstiev, čo je pre nás málo.

• **C)** Ak by v tejto skupine boli štyria ľudia, tak je to vlastne možnosť A, len sa vymenili počty ľudí v jednotlivých skupinách, ale počet priateľstiev by ostal 7, čo nám nestačí.

• **D)** Ak by v tejto skupine boli piati, tak v druhej by vlastne ostala už len Baranča sama, To však nemôže nastať, pretože každý musí mať aspoň jedného priateľa.

Ukázali sme, že týchto ľudí nevieme rozdeliť do dvoch skupín tak, aby existovali ľudia (resp. aspoň jeden človek), ku ktorému sa táto informácia nedostane. Delenie do viacerých skupín už nemá žiaden zmysel, pretože pri viacerých skupinách bude stále len jedna, v ktorej budú informáciu poznať (to je tá, kde bude Baranča) a potom vlastne dve, resp. ešte viac skupín, kde ľudia informáciu poznať nebudú. Medzi týmito ľudmi, ku ktorým sa informácia nedostala, už keď boli všetci v jednej skupine, nikdy nevznikol dostatočný počet priateľstiev, no a keď týchto ľudí rozdelíme ešte do ďalších skupín, tak vlastne len uberieme priateľstvá medzi nimi, ktoré by ináč mohli existovať. A tým pádom ešte znížime počet priateľstiev, pričom už pri dvoch skupinách sme ho mali malý a nikdy sme nevedeli dosiahnuť požadovaných 11 vzťahov.

Ľudí nevieme rozdeliť do žiadnych skupín tak, aby existoval človek, ktorý sa klebetu nedozvie, z čoho vyplýva, že sa ju musia dozvedieť všetci.

Komentár Túto úlohu bohužiaľ väčšina z vás nezvládla vyriešiť správne až na troch riešiteľov, ktorých sme za danú úlohu titulovali aj najkrajším riešením a týmto by sme ich chceli veľmi pochváliť. U vás ostatných sa bohužiaľ vyskytli najčastejšie chyby typu, že ste rozobrali iba možnosť, že ak niekto nemá mať informáciu, tak nesmie mať žiadneho priateľa, no zabúdali ste na fakt, že môže mať priateľov, ku ktorým sa taktiež nedostala daná klebeta. Dúfame, že nabudúce pri podobnej úlohe už nezabudnete rozobrať všetky možnosti :-).

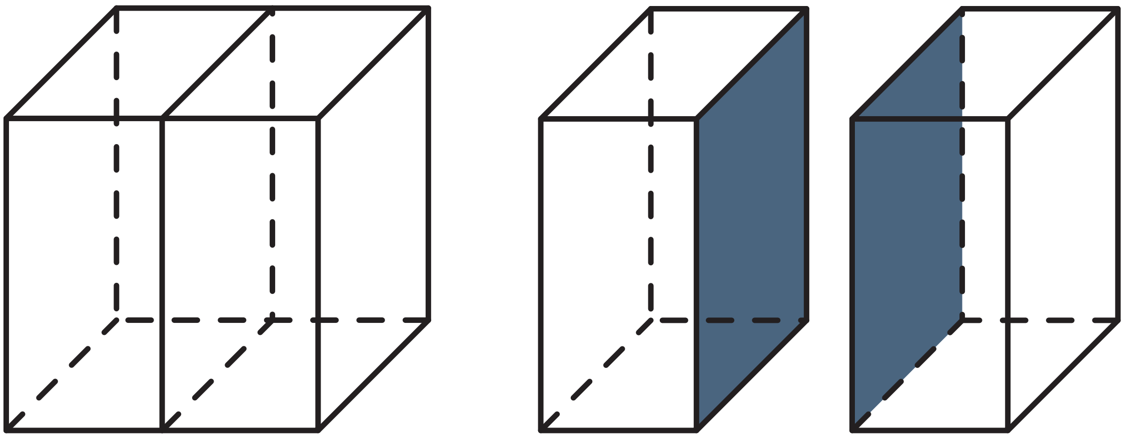
3 opravovali **Žanetka Semanišinová** a **Maťo Rapavý**

najkrajšie riešenia: Samuel Krajči, Michal Masrna

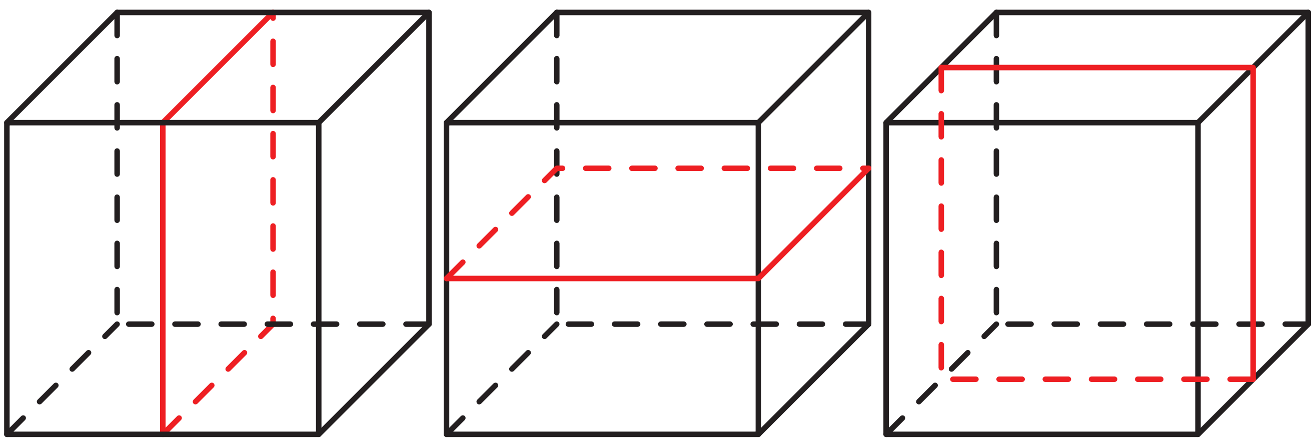
76 riešení

Zadanie Problém mal tvar kocky s hranou 8 centimetrov. Nakrájala ho na menšie zhodné kocôčky tak, aby súčet ich povrchov bol päťkrát väčší ako povrch pôvodnej kocky. Koľko centimetrov bude merať hrana malej kocôčky a aký bude jej objem?

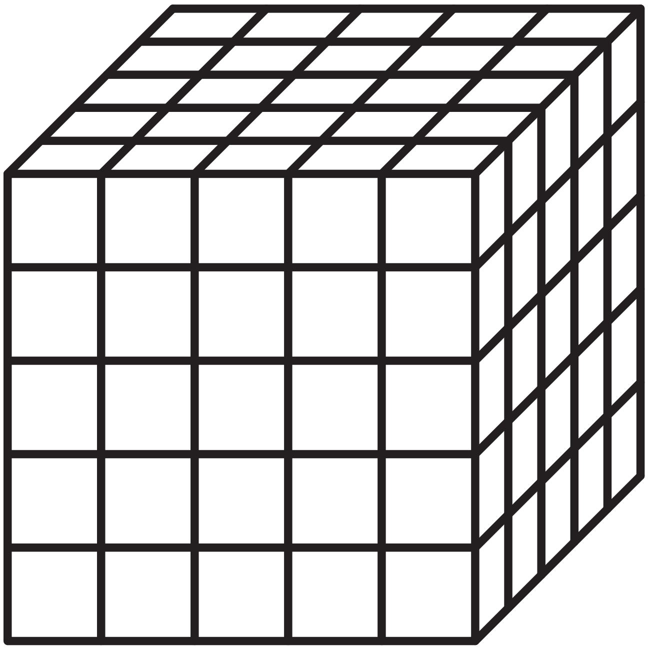
Vzorové riešenie Pozrime sa na to, čo dostávame, keď spravíme rez kockou. Takýto rez musí byť rovnobežný s dvomi protiľahlými stenami kocky, aby sme v nových útvaroch dostali pravé uhly (keďže v kocke sú na seba steny kolmé). Každým takýmto rezom dostaneme dve nové steny kocky, pretože dostávame dva kvádre, ktoré doteraz priliehali k sebe, teda nevytvárali novú stenu, a teraz sme tým rezom obom stenu vytvorili.



Vidíme, že každým novým rezom pridávame dve nové steny kocky. Na začiatku máme kocku so 6 stenami. Chceme dostať 5-krát väčší povrch a teda $5 \cdot 6 = 30$ stien kocky. Chýba nám 24 stien na vytvorenie, každým novým rezom vytvoríme dve, takže potrebujeme spraviť 12 rezov. Keďže pôvodný útvar je kocka, teda má všetky hrany rovnaké, a majú vzniknúť opäť kocky, tak každá hrana musí byť rozdelená na rovnako veľa častí na to, aby boli rovnako dlhé. Rezy vieme robiť tromi smermi:



To znamená, že na dvojici protiľahlých stien urobíme $12/3 = 4$ rezy:



Štyrmi rezmi rozdelíme hranu na päť častí, čiže dostaneme hranu kocôčky dlhú $\frac{8}{5}$ cm$= 1,6$ cm. Keďže jedna hrana je rozdelená na päť častí, kociek tam bude $5^3 = 125$. Teraz vieme spraviť aj skúšku správnosti, lebo veľká kocka má povrch $6 \cdot 8 \cdot 8 = 384$ cm^2 (šesť stien, každá má rozmery 8×8). Malé kocôčky majú dokopy povrch $125 \cdot 6 \cdot 1,6 \cdot 1,6 = 1920$ cm^2. Keďže $1920/384 = 5$, tak naozaj majú malé kocôčky 5-krát väčší povrch. Teraz nám už zostáva len vypočítať objem malej kocky, je to $1,6^3 = 4,096$ cm^3.

Komentár Dôjsť k výsledku v tejto úlohe bolo pre vás pomerne jednoduché, málokto však ukázal, prečo je to jediné riešenie. Väčšina z vás sa do úlohy pustila skúšaním, lenže na tomto spôsobe je ťažké odôvodniť, prečo je vami nájdené riešenie jediné. Keď ste pri skúšaní prechádzali postupne možnosti, musíte si tiež dať pozor, či ich naozaj prechádzate zaradom. Počet rezov síce musí byť celé číslo, ale dĺžka hrany už nie, čo v tomto prípade naozaj platilo. Taktiež pozor na niektoré pojmy – deliteľ je celé číslo, ktorým keď vydelíme číslo, ktorého má byť deliteľom, dostaneme taktiež celé číslo, takže tento pojem sa v tejto úlohe nedal využiť.
V tomto prípade sa dali prechádzať možnosti systematicky len tak, že ste rozmýšľali, koľkými rezmi alebo na koľko častí budete stranu deliť, nedali sa skúšať rôzne dĺžky hrán kocky. Ak budete skúšať rôzny počet rezov alebo vzniknutých častí, dalo sa všimnúť si, že čím na viac častí rozrežete kocku, tým sa zväčšuje aj ich celkový povrch, teda nájdené riešenie musí byť jediné. To však správne dokázala popísať len Viki Brezinová.
Tvrdenie, že ak sa má povrch zväčšiť päťkrát, musí sa strana kocky päťkrát zmenšiť je síce pravdivé, ale nedá sa považovať za fakt, treba dokázať, prečo niečo také platí. Tí, ktorí sa rozhodli úlohu riešiť cez rovnice, to poväčšine zvládli správne, musíte však aj vysvetliť, aké rovnice ste zostavili a prečo platia. Najelegantnejší

spôsob na riešenie úlohy bol taký, že si všimnete počet pribudajúcich plôch pri spravení rezu a teda koľko plôch ešte potrebujete a koľkými rezmi sa to dá docieliť. Tým riešiteľom, ktorým napadol, sa ho podarilo aj správne popísať.

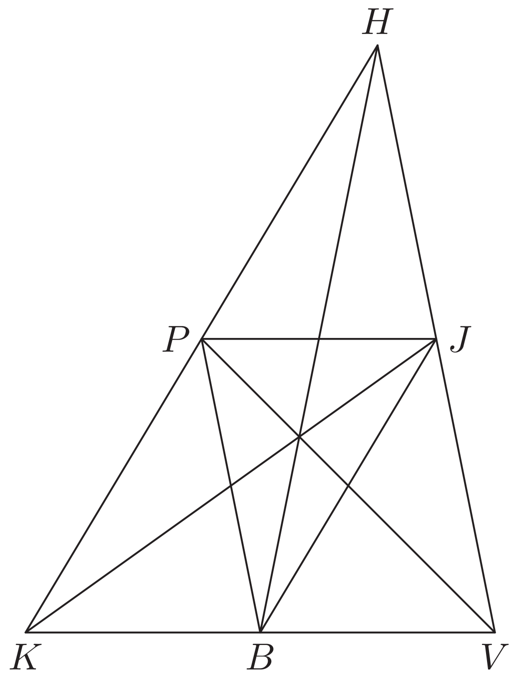
4 opravovali **Ivka Gašková** a **Peťo Kovács**

najkrajšie riešenia: Martin Mihálik, Martin Masrna

76 riešení

Zadanie Máme ľúbostný trojuholník *KVH* (Kiwi, Veverka, Holub). Stredy jeho strán označme *B* (Baranča), *J* (Jašo) a *P* (Pilot Pali). Dokážte, že dva ľúbostné trojuholníky *KVH* a *BJP* majú ťažisko v rovnakom bode. (Ťažisko je bod, v ktorom sa pretínajú ťažnice – tri úsečky, ktoré spájajú stred strany s protiľahlým vrcholom.)

Vzorové riešenie



V trojuholníku *KVH* nám vznikli tri rovnobežníky: *KBJP*, *BVJP*, *BJHP*, keďže stredná priečka trojuholníka je rovnobežná s protiľahlou stranou trojuholníka a zároveň je jej polovicou. Keďže $|KB| = \frac{1}{2}|KV|$ a $|PJ| = \frac{1}{2}|KV|$, tak platí, že $|KB| = |PJ|$, tak isto to platí aj pre *KP* a *BJ*. *KJ* je ťažnica na stranu *HV* a zároveň je uhlopriečka v rovnobežníku *KBJP* rovnako ako úsečka *PB*. Z vlastností rovnobežníka vieme, že jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, a preto *KJ* prechádza stredom strany *BP*. Ťažnica na stranu *HV* je *KJ*, keďže *J* je stred strany *HV* a ťažnica na stranu *PB* je taktiež *KJ*, pretože z vrchola *J* ide do stredu jeho protiľahlej strany. Teda tieto ťažnice sú identické, čiže ležia na jednej priamke. Rovnako to bude platiť aj pre zvyšné dva rovnobežníky. Potom všetky tri dvojice ťažníc budú ležať na identických priamkach, a teda sa aj pretnú v rovnakom bode.

Iné riešenie

Trojuholník *KHV* je podobný s trojuholníkom *BJV* podľa vety *uu*, keďže stredná priečka je rovnobežná s protiľahlou stranou trojuholníka. Keďže sú podobné a pomer je 1 : 2, tak úsečka *PV* bude pretínať úsečku *BJ* v jej strede, presne ako úsečku *KH*. Záver bude teda rovnaký ako v 1. riešení, ťažnice budú identické.

Komentár Mnohí z vás sa úlohu pokúšali vyriešiť, bohužiaľ (správne) predpokladali, že ťažnica veľkého trojuholníka prechádza cez stred protiľahlej strednej priečky a neuviedli dôkaz, toto tvrdenie však treba dokázať.

5 opravovali **Dano Onduš** a **Robko Hajduk**
najkrajšie riešenia: Samuel Chaba

50 riešení

Zadanie Pri obede sedia pätnásti z účastníkov okolo okrúhleho stola. Vždy pri ňom sedia rovnako, no dnes si omylom vymenili miesta tak, že nikto nemal pred sebou svoj hrnček.

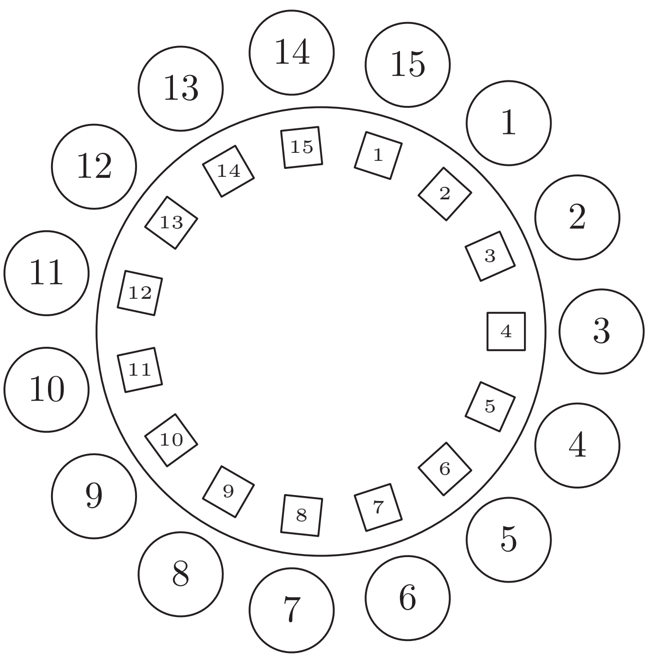
a) Dokážte, že stôl sa dá otočiť tak, aby aspoň dvaja z nich mali pred sebou svoj hrnček.

b) Nájdite príklad takého usadenia, kde pre práve jedno otočenie stola budú mať aspoň dvaja pred sebou svoj hrnček.
Stôl sa môže otáčať o ľubovoľný počet miest do hociktorej strany.

Vzorové riešenie

a) Potrebujeme dokázať, že pre ľubovoľné usadenie 15 ľudí okolo stola tak, že nikto pred sebou nemá svoj pohár, vieme stôl otočiť tak, že aspoň dvaja budú mať pred sebou svoj pohár. Teda, keďže ich poháre sú nejako posunuté, vzdialenosť medzi pohárom a jeho majiteľom je rovnaká aspoň pre dvoch ľudí.
Stôl môžeme otočiť pätnástimi rôznymi spôsobmi (15 do jednej strany a 15 do druhej, pričom ak otočíme stôl o x ľudí do jednej strany, je to to isté ako otočiť stôl o $15-x$ do druhej). Pri väčších otočeniach ako o 15 stôl otočíme naspäť na začiatok a začíname odznovu rovnako. Máme 15 ľudí, teda potrebujeme 15 rôznych vzdialeností posunutia, od 1 do 15, ale keďže 15–te otočenie (a teda aj vzdialenosť 15) je vlastne pôvodné, kde nikto nemá vlastný pohár, máme len 14 otočení, a teda 14 vzdialeností otočenia. Keďže máme 15 pohárov, aspoň dva budú od svojho majiteľa vzdialené rovnako.

b) Pri hľadaní prípadu, kde iba v jednom (z 15) otočení majú pred sebou svoj pohár dvaja a viacerí, môžeme použiť otočenie, kde ho majú pred sebou všetci naraz, a je teda posunutý o rovnakú vzdialenosť. Teda po otočení naspäť dostávame usadenie, kde majú svoj pohár pred sebou všetci, napríklad:



Komentár Väčšina z vás úlohu a) vyriešila pomocou podobného princípu ako vo vzorovom riešení, mnohí však ukázali iba jeden konkrétny prípad, kde po otočení majú pred sebou dvaja svoj vlastný pohár. To však ale neznamená, že ste tvrdenie dokázali. V úlohe b) ste viacerí našli prípad ako vo vzorovom riešení. Niektorí ukázali možnosť, kde pri otočení sedeli dvaja pri svojom pohári, neukázali ste však, že ak stôl otočíme inak, už pri svojom pohári bude sedieť najviac jeden človek. Keďže však skoro nikto nepochopil zadanie úplne, body sme nestrhávali.

6

opravovali **Dorka Jarošová** a **Matúš Hlaváčik**

najkrajšie riešenia: Peter Mann

63 riešení

Zadanie Osem účastníkov sedelo vedľa seba pri bare (v rade) a každý z nich mal pred sebou kolu alebo sprajt. Sedeli tak, že žiadni dvaja účastníci s kolou nesedeli vedľa seba.

a) Koľko je možností, ako mohli byť sprajty a koly za sebou položené na stole (ak nevieme, koľko je sprajtov a koľko kôl)?

b) Keď si objednali druhú rundu, posadali si tak, aby žiadni traja účastníci s kolou nesedeli vedľa seba (teda dve koly ešte vedľa seba položené byť môžu). Koľko je možností, ako mohli byť sprajty a koly za sebou položené na stole teraz?

Vzorové riešenie *Riešiť úlohu tohto typu znamená zamyslieť sa nad tým, koľko kôl vôbec niekedy na stole môže byť a potom si premyslieť, koľko možností je pre jednotlivé počty kôl. Prezradíme vám, že v prípade* **a)** *sú to maximálne 4 koly a počet možností rozmiestnenia je 1, 8, 21, 20, 5, čo je spolu 55 možností. V prípade* **b)** *môže byt na stole maximálne 6 kôl a spolu 149 možností. Skúste si sami premyslieť, ako sme došli k jednotlivým možnostiam. My však ukážeme iné riešenie, ktoré vám môže byt osožné do budúcna, a preto si ho poriadne prečítajte hoci aj dvakrát, a prípadne sa nebojte spýtať vedúcich, ak vám bude niečo nejasné.*

a) Väčšina z vás sa to snažila riešiť nájdením všetkých možností, ale dalo sa to oveľa krajšie. Ak skúsime vypočítať, koľko možností je pre usadenie jedného, dvoch, troch ľudí, tak si všimneme, že nám to vytvára akúsi postupnosť. Preto sa budeme snažiť vyjadriť nasledujúci člen tejto postupnosti pomocou tých predošlých. Uvedomme si, od čoho závisí ďalší člen. Ak si už k sediacim ľuďom prisadne ďalší, tak si určite vždy môže dať sprajt, ale kolu si môže dať len ak ten vedľa neho má sprajt.

Označme si teda počet usadení n ľudí ako P_n, počet možností pri n ľuďoch, kde posledný má kolu, označme ako K_n a počet možností, kde má posledný sprajt, označme S_n. Vieme teda, že $P_n = S_n + K_n$ (počet možností ako usadiť n ľudí je počet možností pri n ľuďoch, keď má posledný sprajt, plus keď má posledný kolu).

Na skamarátenie s označením a myšlienkou riešenia (ak si veríš, tak preskoč na *všeobecne*):

Jeden účastík pri bare ($n = 1$):
Na prvom mieste môže sedieť aj človek s kolou aj so sprajtom, čo znamená, že $K_1 = 1$, $S_1 = 1$, a teda

$$P_1 = K_1 + S_1 = 1 + 1 = 2.$$

Dvaja účastíci pri bare ($n = 2$):
Poďme zistiť S_2. Na druhé miesto môžeme posadiť človeka so sprajtom stále, teda v každej z možností z $n = 1$ môžeme pridať človeka so sprajtom, teda $S_2 = P_1 = 2$. Človeka s kolou môžeme nechať prisadnúť iba v tých možnostiach, kde by si sadol vedľa človeka so sprajtom, a teda $K_2 = S_1 = 1$. To znamená, že

$$P_2 = S_2 + K_2 = P_1 + S_1 = 2 + 1 = 3.$$

Traja účastníci pri bare ($n = 3$):
Tu tak isto, keď chceme pridať človeka so sprajtom, tak ho môžeme pridať ku hociakej možnosti pre $n = 2$, čo znamená, že $S_3 = P_2 = 3$. Keď chceme k existujúcim dvojiciam nechať prisadnúť človeka s kolou, tak musí na konci tej dvojice sedieť človek so sprajtom. Z toho vieme, že $K_3 = S_2$, čo vieme, že sa rovná P_1, teda $K_3 = P_1 = 2$. Teraz už vieme vypočítať P_3:

$$P_3 = S_3 + K_3 = P_2 + P_1 = 3 + 2 = 5.$$

Všeobecne:
$S_n = P_{n-1}$, lebo ku každej možnosti s $n - 1$ ľuďmi môžeme pridať na koniec človeka so sprajtom.
Keď si zoberieme všetky usadenia $n - 1$ ľudí a ideme k nim pridať človeka s kolou, tak na konci tej $n - 1$–tice (mnoziny zlozene z n-1 prvkov) musí sedieť človek so sprajtom. To znamená, že $K_n = S_{n-1}$, z čoho po dosadení vzorca pre S_n dostaneme $K_n = P_{n-2}$.
Teraz keď si to všetko dosadíme do $P_n = S_n + K_n$, tak dostaneme

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2}.$$

Keďže P_1, P_2, P_3 už vieme, tak si už iba postupne dopočítame P_8. Výsledok nám vyjde 55.

b) Tu sme mohli postupovať podobne ako v *a)* a označiť si počty P_n a S_n rovnako ako v *a)* (budú znamenať to isté). Možnosti, ktoré končia na kolu, si rozdelíme na tie, kde je tá posledná kola prvá v poradí, a teda môžeme vedľa nej dať ďalšiu kolu (označíme $K1_n$), a na tie, kde tá kola vedľa seba už kolu má, a teda za ňou musí ísť sprajt (označíme $K2_n$). Teraz si ešte treba uvedomiť, že $P_n = S_n + K1_n + K2_n$. Keď usádzame jedného a dvoch ľudí, tak si všetky tieto počty vieme jednoducho vypočítať:

n	S_n	$K1_n$	$K2_n$	P_n
1	1	1	0	**2**
2	2	1	1	**4**

Teraz sa zamyslime, ako to bude pokračovať ďalej. Sprajt môžeme dať za každú možnosť, teda sprajtov na n–tom mieste bude toľko, koľko je $n-1$–tíc:

$$S_n = P_{n-1}.$$

Ak chceme, aby na konci bola jedna kola, tak pred tým musí byť sprajt, teda počet $n-1$–tíc, ktoré končia sprajtom je počet n–tíc, ktoré končia jednou kolou:

$$K1_n = S_{n-1} = P_{n-2}.$$

Už nám zostáva len zistiť $K2_n$. Počet $n-1$–tíc, ktoré končia na jednu kolu, je počet n–tíc, ktoré končia na dve koly, teda:

$$K2_n = K1_{n-1} = S_{n-2} = P_{n-3}.$$

Teraz už vieme vypočítať P_n:

$$P_n = S_n + K1_n + K2_n,$$

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3}.$$

Keďže P_1 a P_2 už vieme, tak vidíme, že nám treba dopočítať už len P_3 (to teraz určite jednoducho zvládnete aj sami) a môžeme dosadzovať do tohto vzorca, až kým dostaneme 8. člen tejto postupnosti, ktorý je zároveň aj naším výsledkom, a teda 149.

Komentár Táto úloha bola pomerne náročná nielen na riešenie, ale aj na opravovanie, a možno aj preto si väčšina z vás vybrala tú horšiu možnosť a pokúsila sa vypísať všetky možnosti. Pri takom počte riešení je to ale naozaj komplikované a bez poriadneho systému sa to nezaobíde.
Ak totižto nemáte vypísané všetky možnosti, nemáte ani postup ani výsledok. Niektorí v snahe o systém vypísali iba pre koľko kôl je koľko možností a potom to sčítali. Bez odôvodnenia ako prišli práve k takémuto počtu možností v jednotlivých prípadoch sa to ale za úplne správne riešenie považovať nedá. Boli však aj riešitelia, ktorí potešili a odhalili postupnosť na základe ktorej možnosti pribúdali. Ak sa to skĺbilo s dostatočnou dávkou vysvetlenia, zdôvodnenia a popisu vzniklo pár pekných riešení.

B

opravovali **Aktka Krajčiová** a **Dorka Jarošová**

najkrajšie riešenia: Tomáš Chovančák

1 riešenie

Zadanie Nájdite čo najviac básnických výrazových prostriedkov (záujemcovia môžu pridať aj prípadnú analýzu textu s rozborom umeleckého diela, to ohodnotíme možno tiež) a pošlite nám ich spolu s riešeniami prvej série. Výhercu bude vyberať odborná porota na základe korektnosti vami vybratých básnických výrazových prostriedkov, a bude uverejnený v nasledujúcom čísle so vzorovými riešeniami úloh prvej série, a odmenený sladkou odmenou.

Komentár Toto riešenie bolo po prvej sérii odmenené sladkou odmenou. Výhercovi gratulujeme a dúfame, že chutila (-:

Poradie po 2.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	CS
1.	Lenka Kopfová	8. F	ZHradCZ	52	9	9	9	9	9	-	**106**
2.	Matej Hanus	7. A	ZKro4KE	54	9	9	8	9	2	7	**105**
3. – 4.	Martin Masrna	9. A	ZKro4KE	49	8	5	9	9	9	7	**96**
	Samuel Krajči	Tercia	GAlejKE	52	1	5	9	9	9	7	**96**
5. – 7.	Kristína Bratková	1. B	GŠkulKE	48	2	7	9	9	9	9	**93**
	Martin Melicher	8. A	ZKro4KE	45	9	9	9	9	6	2	**93**
	Martin Števko	Tercia	GAlejKE	46	9	6	2	9	9	8	**93**
8.	Michal Masrna	7. B	ZKro4KE	48	7	6	9	-	6	7	**92**
9. – 11.	Martin Mihálik	Tercia	GAlejKE	48	8	5	9	9	-	7	**91**
	Viktória Brezinová	Tercia	GAlejKE	43	9	4	9	9	9	6	**91**
	Róbert Sabovčík	7. A	ZKro4KE	48	9	5	4	9	2	7	**91**
12.	Martin Spišák	Kvarta A	GAlejKE	46	9	5	9	9	-	9	**87**
13.	Samuel Chaba	Tercia	GAlejKE	47	9	4	9	4	9	-	**86**
14.	Martin Mičko	Tercia	GAlejKE	47	7	5	8	4	9	-	**84**
15.	Natália Česánková	9. A	ZHvieLY	41	9	5	4	9	9	6	**83**
16.	Radovan Lascsák	7. B	ZKro4KE	42	7	4	4	9	-	7	**82**
17.	Patrik Paľovčík	7. A	ZKro4KE	39	8	6	4	2	9	6	**81**
18.	Michaela Dlugošová	9. B	ZFranPP	40	7	5	9	5	9	4	**79**
19. – 20.	Karol Grilling	Kvarta A	GTataPP	39	9	4	9	9	2	6	**78**
	Katarína Kuľková	9.	ZSDrienov	39	9	5	9	9	6	1	**78**
21.	Martin Albert Gbúr	7. A	ZKro4KE	45	9	5	4	3	-	1	**76**
22.	Šimon Šoltés	Sekunda A	GTr12KE	44	9	5	4	4	-	0	**75**
23.	Filip Csonka	Tercia	GAlejKE	43	9	4	2	4	9	-	**73**
24.	Tomáš Chovančák	7. B	ZKro4KE	38	7	5	9	2	2	0	**72**
25.	Dárius Pacholský	7. A	ZKro4KE	41	9	3	6	-	-	3	**71**
26. – 28.	Matej Tarča	7. B	ZKro4KE	40	9	6	3	-	-	3	**70**
	Matej Genči	9. A	ZKro4KE	35	9	6	9	9	-	2	**70**
	Vladimír Durňák	Tercia	GAlejKE	39	7	4	2	9	7	-	**70**
29.	Lívia Knapčoková	Tercia	GAlejKE	40	6	3	2	4	9	-	**66**
30.	Tomáš Miškov	Tercia B	GTr12KE	39	7	5	2	1	9	0	**64**
31. – 33.	Lucia Hlaváčiková	1. C	GsvEdKE	32	8	5	9	9	-	-	**63**
	Kamil Fedič	9. B	ZHrnčHÉ	30	9	5	3	4	8	4	**63**
	Veronika Šonková	Tercia	GAlejKE	39	7	4	2	2	7	-	**63**
34. – 35.	Tereza Rudzanová	Tercia	GAlejKE	33	9	4	7	4	2	1	**61**
	Jana Sadovská	Kvarta A	GMetoBA	40	0	5	8	2	5	1	**61**
36.	Marek Koman	Kvarta A	GAlejKE	40	3	2	9	4	-	2	**60**
37.	František Gábor	7. A	ZKro4KE	25	9	5	9	-	-	1	**58**
38. – 39.	Jonáš Suvák	8. C	ZŠmerPO	26	6	4	4	4	9	3	**57**
	Simona Pecsérke	7. B	ZKrátSA	29	9	6	3	1	-	-	**57**

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	CS
40. – 41.	Michal Kavuľa	7. B	ZKro4KE	31	7	3	4	4	-	-	**56**
	Tatiana Horvátová	Tercia	GAlejKE	33	6	4	2	4	5	-	**56**
42.	Veronika Jaklovská	7. A	ZMalIda	31	9	1	-	1	3	0	**54**
43.	Veronika Danková	Sekunda B	GAlejKE	29	7	5	1	1	2	2	**53**
44. – 45.	Jakub Patrik	7. A	ZKro4KE	34	2	4	2	3	-	0	**49**
	Soňa Liptáková	7. B	ZKro4KE	30	7	1	-	4	-	0	**49**
46.	Benjamín Mravec	7. B	ZKro4KE	28	3	4	2	4	3	1	**48**
47. – 48.	Peter Mann	Tercia	GKomeTV	28	5	0	4	1	-	9	**47**
	Kristína Kozeleková	9.	ZSBadin	24	9	5	5	1	2	1	**47**
49.	Filip Miroslav Kucka	7. B	ZNov2KE	24	9	3	-	1	-	0	**46**
50.	Matúš Nadžady	Kvarta A	GTataPP	21	7	5	1	9	-	1	**44**
51. – 52.	Diana Rudzanová	Sekunda B	GAlejKE	27	4	3	3	2	-	0	**43**
	Judita Rumiová	8.	ZSSvPet	29	7	3	2	2	-	0	**43**
53. – 56.	Juraj Jursa	Kvarta B	GAlejKE	34	0	5	2	-	-	1	**42**
	Marek Vaško	8. B	ZMukaPO	28	6	1	3	4	-	0	**42**
	Erik Berta	Tercia	GAlejKE	35	0	3	3	1	0	0	**42**
	Jakub Vojčík	Sekunda B	GAlejKE	21	7	5	1	1	0	0	**42**
57.	Petra Lichá	Kvarta A	GTataPP	30	3	1	4	1	2	0	**41**
58.	Katarína Rosinová	Kvarta A	GTataPP	22	9	1	-	4	3	-	**39**
59. – 60.	Denis Nevelöš	9. A	ZZeliKE	22	9	-	2	-	-	4	**37**
	Daniela Lazoriková	Tercia	GAlejKE	26	2	4	3	2	-	0	**37**
61.	Šimon Juhás	8. A	ZKro4KE	15	9	6	-	4	-	-	**34**
62.	Martin Šalagovič	Tercia	GAlejKE	33	-	-	-	-	-	-	**33**
63.	Martin Budjač	8	ZSkoSnB	18	7	1	3	-	3	0	**32**
64. – 65.	Alexandra Lapšanská	9. A	ZSMlyn	15	7	1	3	2	2	-	**30**
	Matúš Zakucia	Kvarta A	GAlejKE	30	-	-	-	-	-	-	**30**
66. – 68.	Lucia Menčáková	Kvarta A	GTataPP	19	5	1	1	1	2	0	**29**
	Roxana Rajtáková	9. A	ZKro4KE	29	-	-	-	-	-	-	**29**
	Martin Kozák	Sekunda B	GAlejKE	29	-	-	-	-	-	-	**29**
69. – 70.	Romana Bogárová	7. B	ZKrátSA	21	2	1	1	-	-	-	**27**
	Samuel Ivan	8. B	ZŠmerPO	14	6	1	2	2	1	0	**27**
71. – 72.	Richard Ciglanský	Sekunda A	GAlejKE	26	-	-	-	-	-	-	**26**
	Nikola Svetozarov	9. A	ZKro4KE	8	-	-	9	9	-	-	**26**
73. – 75.	Dominik Borbuliak	7. A	ZŠmerPO	25	-	-	-	-	-	-	**25**
	Alica Jarošová	Kvarta A	GTataPP	11	7	3	3	1	-	0	**25**
	Sofia Komlošová	9. B	ZKro4KE	25	-	-	-	-	-	-	**25**
76.	Richard Pospíšil	Kvarta A	GTataPP	7	8	4	-	4	-	-	**23**
77.	Jakub Kučerák	8. A	ZKro4KE	22	-	-	-	-	-	-	**22**
78.	Matúš Ferenčuha	8. A	ZKro4KE	21	-	-	-	-	-	-	**21**
79. – 81.	Rastislav Špakovský	9. B	ZTomKe	20	-	-	-	-	-	-	**20**
	Sabína Lesná	Kvarta A	GTataPP	0	7	1	7	2	3	-	**20**
	Michaela Bašistová	Kvarta A	GTataPP	5	9	1	4	1	0	0	**20**
82. – 83.	Adam Kalivoda	9. A	ZKro4KE	19	-	-	-	-	-	-	**19**
	Lea Luptáková	Kvarta A	GTataPP	6	7	1	2	3	-	0	**19**

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	CS
84. – 85.	Beáta Vrábelová	8.	ZSSvPet	3	7	1	3	1	2	0	**18**
	Ivana Topitkalová	9. B	ZTomKe	13	3	0	1	1	0	0	**18**
86. – 89.	Martin Murcko	7. B	ZKurima	17	-	-	-	-	-	-	**17**
	Alžbeta Daňková	7. B	ZKurima	17	-	-	-	-	-	-	**17**
	Andrea Bartošová	7. B	ZKurima	17	-	-	-	-	-	-	**17**
	Katarína Mlynarčíková	Kvarta A	GTataPP	11	2	1	1	2	-	0	**17**
90. – 94.	Ján Velčický	9. B	ZKrátSA	16	-	-	-	-	-	-	**16**
	Juraj Slivka	9. B	ZTomKe	16	-	-	-	-	-	-	**16**
	Juraj Roman	Sekunda B	GAlejKE	16	-	-	-	-	-	-	**16**
	Paulína Porubská	9. B	ZKrátSA	16	-	-	-	-	-	-	**16**
	Radomír Miščík	8. A	ZKro4KE	16	-	-	-	-	-	-	**16**
95.	Paulína Kukanová	9. B	ZKrátSA	6	7	-	1	1	-	-	**15**
96. – 97.	Samuel Staš	Kvarta A	GTataPP	10	-	1	-	1	2	-	**14**
	Miriam Hajdúková	9. B	ZKrátSA	14	-	-	-	-	-	-	**14**
98. – 100.	Martin Csiba	9. B	ZKrátSA	12	-	-	-	-	-	-	**12**
	Vivien Árendášová	8.	ZSSvPet	12	-	-	-	-	-	-	**12**
	Filip Malik	9. C	ZŠmerPO	12	-	-	-	-	-	-	**12**
101. – 102.	Patrik Štefanko	Sekunda A	GAlejKE	11	-	-	-	-	-	-	**11**
	Samuel Novák	9. C	ZŠmerPO	11	-	-	-	-	-	-	**11**
103.	Philip Petison	9. B	ZKrátSA	10	-	-	-	-	-	-	**10**
104. – 108.	Samuel Brndiar	Kvarta A	GTataPP	8	-	-	-	-	-	-	**8**
	Peter Čulen	9. A	ZKro4KE	8	-	-	-	-	-	-	**8**
	Marián Figula	7. A	ZŠmerPO	8	-	-	-	-	-	-	**8**
	Jakub Spiszak	9. B	ZKrátSA	8	-	-	-	-	-	-	**8**
	Dávid Stripaj	8. A	ZKro4KE	8	-	-	-	-	-	-	**8**
109. – 110.	Dominika Mišková	Kvarta A	GTataPP	0	4	1	-	2	-	-	**7**
	Adam Kišš	9. B	ZKrátSA	7	-	-	-	-	-	-	**7**
111. – 115.	Tomáš Benkovič	9. B	ZKrátSA	6	-	-	-	-	-	-	**6**
	Alexandra Orságová	9. B	ZKrátSA	6	-	-	-	-	-	-	**6**
	Diana Sokolová	7. A	ZŠmerPO	6	-	-	-	-	-	-	**6**
	Sára Kusyová	9. B	ZKrátSA	6	-	-	-	-	-	-	**6**
	Sandra Galánková	9. B	ZKrátSA	6	-	-	-	-	-	-	**6**
116. – 117.	Paulína Gáliková	8. B	ZKrátSA	5	-	-	-	-	-	-	**5**
	Adriana Pavlíková	Kvarta A	GTataPP	0	2	1	1	1	-	0	**5**
118. – 124.	Kornélia Lőrincová	7.	ZSSvPet	3	-	-	-	-	-	-	**3**
	Martin Miškovič	8. A	ZKrátSA	0	1	0	1	1	0	0	**3**
	Zuzana Dócreová	7.	ZSSvPet	3	-	-	-	-	-	-	**3**
	Adam Bočák	7. B	ZKrátSA	0	0	1	0	0	1	0	**3**
	Patrik Urban	8. A	ZKrátSA	0	1	0	1	1	0	0	**3**
	Samuel Szullo	7. B	ZKrátSA	0	0	1	1	0	0	0	**3**
	Natália Tóthová	9. A	ZKro4KE	0	-	3	-	-	-	-	**3**
125.	Denis Farkaš	8. A	ZSSlad	2	-	-	-	-	-	-	**2**
126.	Michaela Remeňová	8.	ZSKomj	0	0	0	0	0	0	0	**0**

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 3 • Zimná časť 27. ročníka (2013/14) • Vychádza 10. decembra 2013
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`