L O M I H L A V   2 0 0 4

Hádanky

1. Zelená som, tráva nie som; sladká som, cukor nie som; tvrdá som, kosť nie som; červená som, krv nie som; chvost mám, krava nie som. Čo som?

2. Chodí v ľudských šatách a nie je to človek. Čo je to?

3. Ako krieda belučké, ako mach ľahučké, mäkké ako hodváb, lež studené ako ľad, zmizne ako pena, nie je bez mena. Čo je to?

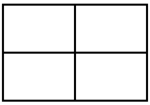
4. Či prichádzame alebo odchádzame, vždy mu ruku podávame. Čo je to?

5. Má dve nohy a keď sa prechádza, len na jednej chodí. Čo je to?

L O M I H L A V   2 0 0 4

Zadania príkladov...

1. Ježibabka požičiava Jankovi a Marienke lietajúcu metlu za čokolády a cukríky. Za 2 čokolády im požičia metlu na tri hodiny a za 12 cukríkov na jednu hodinu. Janko a Marienka dali ježibabke 1 čokoládu a 4 cukríky. Ako dlho sa môžu povoziť na ježibabkinej metle?
2. Archimedes si nakreslil do piesku obdĺžnik so stranami dlhými 6 cm a 8 cm. Stredy jeho strán spojil ako na obrázku. Tým dostal niekoľko obdĺžnikov. Aký je obsah všetkých obdĺžnikov, ktoré uvidel v piesku?



3. Danka a Janka hrali na lúke svoju obľúbenú hru. Dievčatká si hovoria čísla od 1 po 100. Ak povedia násobok čísla 3 alebo číslo končiace číslicou 5, každá z nich si odtrhne kvietoček do kytičky. Koľko kvietočkov si odtrhnú dokopy za jednu hru?
4. Popoluška má 9 mištičiek usporiadaných do štvorca 3x3. Do jednej z nich vhodí 1šošovičku, do inej 2, potom 3... atď., až napokon do poslednej mištičky vhodí 9 šošovičiek. Macocha ju ale pustí na ples len vtedy, ak sa jej podarí ich rozdeliť tak, že súčet šošovičiek v mištičkách prvého riadku bude 23, v druhom riadku 10, v prvom stĺpci 10 a v treťom stĺpci 14. Koľko šošovičiek má Popoluška vhodiť do prostrednej mištičky?
5. Majster N si vybral z chladničky fľašu žabieho slízu. Odpil z nej šestinu, ale zdal sa mu príliš sladký, preto dolial fľašu vodou a zamiešal. Z doplnenej fľaše odpil tretinu a znova ju dolial vodou. Tak mal fľašu znova plnú. Odpil z nej polovicu, opäť dolial vodou a nakoniec vypil všetko. Čo myslíte, vypil viac vody alebo žabieho slízu?
6. Včielka Maja si všimla, že u nich doma, v úli, majú krásne šesťuholníčky. Začala si potom s Vilkom kresliť pravidelný troj-, štvor-, päť... až desaťuholník. Nevedeli sa ale dohodnúť, ktoré z nich sú stredovo súmerné. Poraďte im – koľko z týchto pravidelných n-uholníkov je stredovo súmerných?
7. Vypočítajte, za ako dlho sa zaplní povrch jazera Žaburinkami, ak sme na začiatku vhodili do jazera štyri Žaburinky. Ak by sme vhodili len jednu, hladina by sa zaplnila za 20 dní. O Žaburinkách vieme, že každý deň sa jedna Žaburinka rozdelí na dve dcérske Žaburinky.
8. Snehulienka upiekla trpaslíkom úžasnú tortu. Hundroš, Mudroš, Kýblik a Spachtoško sa ale vrátili skôr ako ostatní a niekto z nich neodolal a zjedol celú tortu! Keď sa Snehulienka opýtala, kto to urobil, odpovedali takto:

   Hundroš: Ja som to nebol!

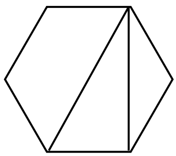
   Mudroš: Bol to Kýblik!

Kýblik: Ja som to nebol!
Spachtoško: Bol to Mudroš!
Jeden z trpaslíkov klamal. Kto zjedol Snehulienkinu chutnú tortu?

9. Futbalové družstvo Janka Hraška zohralo 28 zápasov na turnaji Mladé talenty. V štyroch remízovalo a trikrát viac zápasov vyhralo ako prehralo. Koľko bodov získalo toto družstvo, ak za každý vyhraný zápas dostalo 2 body, za remízu 1 bod a za prehru 0 bodov?
10. Každé ráno vyrazí krásny koč zo zlatého zámku tak, aby presne o 8:00 bol pri striebornom zámku. Princezná zo strieborného zámku hneď nastúpi a koč ju odvezie na návštevu k jej staršej sestre do zlatého zámku. Jedného dňa sa princezná zo strieborného zámku rozhodla, že pôjde na prechádzku, a tak sa vybrala o 7:00 koču naproti. Keď sa stretli, nasadla a pokračovali kočom. Do zlatého zámku prišli o 20 minút skôr ako obyčajne. Koľko bolo hodín, keď sa princezná a koč stretli?
11. Polepetko si nakreslil trojuholník ABC, pričom jeho strany mali dĺžku 7,5 cm, 9 cm a 15 cm. Potom vyznačil na jeho stranách body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 a C_2 tak, že rozdeľovali strany trojuholníka na tretiny. Zapáčil sa mu šesťuholník $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ a správne vypočítal jeho obvod, ale keďže vždy všetko popletie, rýchlo si výsledok zapísal na papier, aby ho nezabudol. Aké číslo napísal Polepetko na papier?
12. Žabí princ a zlý Ropušiak sa rozhodli, že krásnu Palculienku získa ten, kto vyhrá preteky v skákaní. Dohodli sa, že budú skákať 500 metrov tam a 500 metrov späť. Veľký Ropušiak mal dlhšie skoky, pri každom skoku skočil 3 metre, Žabí princ len 2 metre. Princ ale skákal rýchlejšie ako Ropušiak – kým Ropušiak urobil 2 skoky, princ skočil trikrát. Kto získal krásnu Palculienku?
13. Zajko z klobúka sa rozhodol zúčastniť veľkých bežeckých pretekov na 15 km. Prebehol presne 12345 metrov, 12345 decimetrov a 12345 centimetrov, ale potom mu už došli sily. Koľko milimetrov mu chýbalo do cieľa?
14. V truhlici je 333 hracích kociek. Princ Vetroslav ich postupne vyberá a ukladá na lavicu. Prvú kocku položí jednou bodkou navrch, potom vedľa dve kocky dvoma bodkami navrch, ďalej tri kocky troma bodkami navrch atď. až uloží šesť kociek šiestimi bodkami navrch. Potom to všetko začne opakovať, t.j. znova položí jednu kocku jednou bodkou navrch atď., až kým sa truhlica nevyprázdni. Vypočítajte súčet všetkých bodiek na horných stenách kociek.
15. Víla Amálka si skladala zo zápaliek rôzne trojuholníky. Koľko z nich mohlo mať obvod presne 15 zápaliek, ak zápalky nelámala?
16. Dui, Lui a Hui kúpili strýkovi Držgrošovi k narodeninám bonboniéru. Bolo v nej 36 cukríkov, ktoré mali rôzne príchute, ale vyzerali rovnako. 8 bolo jahodových, 7 karamelových, 6 banánových a 15 čokoládových. Káčeríci sú ale veľmi maškrtní

a dostali chuť na cukríky. Koľko najviac cukríkov môžu zjesť, ak chcú mať istotu, že strýkovi ostane z každého druhu aspoň jeden cukrík?

17. Princ Bajaja napísal niekoľko čísel. Osem z nich bolo deliteľné šiestimi, šesť desiatimi, päť pätnástimi a tri tridsiatimi. Aspoň koľko čísel musel princ napísať?
18. Na Vianoce potrebujú škriatkovia vyrobiť 2002000 hračiek. Hračky vyrába spolu 7700 škriatkov a za 1 deň ich vyrobí každý 20. Ktorého decembra musia začať pracovať, aby 24.12. boli už hračky hotové? pozn.: 24.12. sa už nepracuje :)
19. Alibaba našiel v jaskyni na stene takýto obrázok:



Zistil, že strana tohto pravidelného šesťuholníka je dlhá 10 cm. Aký je obsah vyznačeného trojuholníka?

20. Katka, Zuzka, Nikka, Feri, Kuiso, Jerry a Giro sa rozhodli zistiť výšku prostredného z nich. Zistili, že priemerná výška štyroch najnižších je 167,5 cm a priemerná výška štyroch najvyšších je 180 cm. Priemerná výška všetkých je 174 cm. Akú výšku má prostredný z nich?

L O M I H L A V   2 0 0 4

Vzorové riešenia:

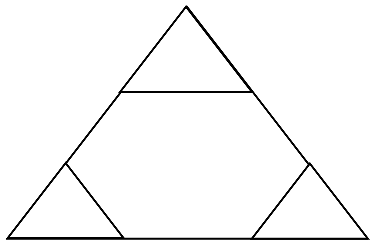
1. Ľahšie je rátať v minútach. Za 2 čokolády si môžu požičať metlu na 3 hodiny, teda na 180 minút. Za jednu čokoládu je to polovica času, teda 90 minút. Za 12 cukríkov si môžu požičať na 60 minút, a keďže 4 cukríky sú trikrát menej ako 12 cukríkov, za 4 cukríky si môžu požičať metlu na 60/3=20 minút. Za jednu čokoládu a 4 cukríky si tak môžu požičať metlu na 90+20=110 minút, resp. **1 hod 50 min**.
2. Najprv si zistíme, koľko obdĺžnikov vidíme na obrázku. Je tam 1 veľký(daný) so stranami 6 cm a 8 cm, 4 malé s polovičnými stranami a 4 stredné zložené z dvoch malých susedných obdĺžnikov. Zo štyroch malých vieme poskladať veľký obdĺžnik a a so 4 stredných dve veľké obdĺžniky. To znamená, ze obsah všetkých obdĺžnikov, ktoré vidíme, je 1(veľký)+1(4 malé)+2(4 stredné)=4 krát obsah veľkého. Hľadaný obsah je 4.6.8=**192 cm^2.**
3. Príklad vyriešime tak, že nájdeme počet čísel, pri ktorých si dievčatká odtrhnú kvietoček. Sú to všetky čísla od jedna po 100 deliteľné troma (tých je 33, pretože, ak vydelíme 100 troma, dostaneme 33 zvyšok 1) a okrem nich čísla, ktoré končia 5, ale nie sú deliteľné troma (tie sme už započítali). Tie sú 5, 25, 35, 55, 65, 85, 95 a je ich 7. Každé dievčatko odtrhne 33+7=40 kvietočkov a obidve dokopy teda **80**.
4. Označme Jankin vek j a Dankin d. Vieme, že j+d= 22(1.). Príklad začneme rátať od konca. Janka bude mať o dva roky (j+2) rokov a Danka bola dvakrát mladšia ako vtedy Janka, teda mala (j+2)/2 rokov. A to bolo pred d-(j+2)/2 rokmi. Vtedy mala Janka tiež o d-(j+2)/2 menej rokov ako teraz a to je j – [d - (j+2)/2] = 3/2j +1 –d. A Danka má teraz o jeden rok viac ako Janka vtedy. Teda d = 3/2j + 1 – d +1(2.). A máme dve rovnice (1.) a (2.) o dvoch neznámych, ktorých riešením je d=10 a j=12. Danka má **10 rokov**.
5. Stačí sa zamyslieť. Majster N vypil vlastne celý žabí sliz a k tomu aj všetku vodu, ktorú do neho dolial. Nech objem žabieho slizu, teda fľaše je V. Majster N prilial 1/6V potom 1/3V a nakoniec 1/2V, čo je dokopy 1V. Vypil teda V slizu i V vody. Správna odpoveď je, že Majster N vypil **rovnako** vody i žabieho slizu.
6. Keď si pravidelné n-uholníky nakreslíme, ľahko z obrázka vidíme, že vyhovujú len tie s párnym počtom strán a stred stredovej súmernosti je prienik spojníc protiľahlých bodov. n=**4,6,8,10**.
7. Ak hodíme do jazierka 1 Žaburinku, na druhý deň sa z nej stanú dve Žaburinky a na tretí deň sa znova rozdvoja, v jazierku budú 4 Žaburinky. Trvá dva dni, kým sa z jednej Žaburinky stanú 4. Preto, ak máme v jazierku jednu Žaburinku a celé jazierko sa tak zaplní za 20 dní, pri štyroch žaburinkách sa tento proces skráti o 2 dni, a jazierko sa zaplní za **18 dní**.
8. Rozoberieme všetky 4 možnosti, keď jeden z trpaslíkov zjedol tortu. Ak to bol Hundroš, potom klamal on sám aj s Mudrošom a Kýblikom. Klamali by až traja. Táto možnosť nevyhovuje. Ak to bol Mudroš, tak klamal iba on sám. Táto možnosť vyhovuje. Ak

zjedol tortu Kýblik, potom klamal on sám, no i Spachtoško. Ani táto možnosť nevyhovuje, klamali dvaja. Ak zjedol tortu Spachtoško, tak klamal on sám i Mudroš, preto ani táto možnosť nevyhovuje. Tortu teda zjedol **Mudroš**.

9. Nech družstvo vyhralo x zápasov. Potom prehralo 28 (počet všetkých zápasov)-4(počet remíz)-x(počet výhier)=24-x. Podľa zadania vieme, že vyhrali trikrát viac zápasov. Preto: x = 3 (24-x). Riešením tejto rovnice je x = 18. Celkovo družstvo získalo 18.2(za výhru)+4.1(za remízu)=**40 bodov**.

10. Úloha sa dá pekne vyriešiť úvahou. Povedzme, že keď sa koč a princezná stretli, od strieborného zámku boli vzdialení *a* minút cesty kočom. Ak by sa neboli stretli, musel by koč prejsť najprv *a* minút smerom k zámku, tu by princezná nasadla a potom *a* minút späť, kým by sa dostali do bodu, v ktorom sa v skutočnosti stretli. To znamená, že tým, že princezná šla koču naproti, mu ušetrila *2a* minút cesty (*a* tam, *a* späť). Keďže to bolo 20 minút, a = 10 min, a teda keď sa stretli, **bolo 7:50.**

11. Ak chceme vypočítať obvod šesťuholníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, potrebujeme zistiť dĺžky všetkých jeho strán. Body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 a C_2 rozdeľujú strany trojuholníka ABC na tretiny, teda vieme, že strany A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2 majú dĺžky 7,5 : 3 = 2,5 cm, 9:3 = 3 cm, 15:3 = 5 cm.



Ostávajú ešte strany A_2B_1, B_2C_1 a C_2A_1. Pozrime sa na trojuholníky AA_1C_2 a ABC. Uhol pri vrchole A majú spoločný a zároveň platí: $|AB| = 3.|AA_1|$, $|AC| = 3.|AC_2|$. To znamená, že tieto trojuholníky sú podobné podľa vety *sus,* teda platí aj $|BC| = 3.|A_1C_2|$ Z toho vieme, že $|A_1C_2| = |BC|:3$. Rovnakým spôsobom prídeme na to, že aj strany B_1A_2 a C_1B_2 majú tretinové dĺžky strán trojuholníka ABC. Spolu teda obvod šesťuholníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ bude

o = $|A_1A_2| + |A_2B_1| + |B_1B_2| + |B_2C_1| + |C_1C_2| + |C_2A_1|$ = *2.2,5 cm + 2.3 cm + 2.5 cm =* ***21 cm***

12. Žabí princ aj Ropušiak napredujú rovnako rýchlo – kým Ropušiak urobí 2 skoky (2.3 m = 6 m), Princ skočí trikrát (3.2 m = 6 m). Finta je ale v tom, že Ropušiak svojimi skokmi nemôže preskákať presne 500 m tam a 500 m naspäť, keďže číslo 500 nie je deliteľné tromi. Musí teda preskákať až 501 metrov tam aj späť (501 je už deliteľné tromi). Žabí princ robí dvojmetrové skoky, teda urobí presne 500 : 2 = 250 skokov tam aj späť. To znamená, že Ropušiak musí preskákať väčšiu vzdialenosť a do cieľa dorazí ako druhý. **Preteky vyhrá Žabí princ.**

13. Najprv si všetky vzdialenosti premeníme na jednu spoločnú jednotku, napr. metre:
    12345 dm = 1234,5 m

12345 cm = 123,45 m

A teraz ich spočítaním zistíme, koľko zajko spolu prebehol metrov:
12345 m + 12345 dm + 12345 cm = 12345 m + 1234,5 m + 123,45 m = 13702,95 m
Do cieľa mu teda chýbalo: 15 km - 13702,95 m = 15000 m - 13702,95 m = 1297,05 m = **1 297 050 mm.**

14. Vypočítame súčet bodiek v jednej „sérii“, teda od 1 kocky s 1 bodkou po 6 kociek so 6 bodkami:
1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5 + 6.6 = 91. Teraz zistíme, koľko takýchto „sérií“ kociek princ Vetroslav uložil na lavicu. V jednej „sérii“ máme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 kociek, teda medzi 333 kockami je 333:21 = 15, zvyšok 18. Teda 15 celých sérií a 18 kociek k tomu, to je to isté ako 16 celých sérií, od ktorých odpočítame posledné tri kocky... Celkový súčet bodiek je teda 16.91 – 3.6 = **1438**

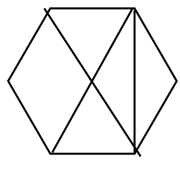
15. Zistime, z koľkých zápaliek sa mohli skladať strany trojuholníkov, ktoré skladala víla Amálka. Hľadáme všetky možné trojice celých čísel a, b, c, ktoré majú súčet 15, napr. 3 + 5 + 7 = 15. Pre tieto čísla ale musí zároveň platiť trojuholníková nerovnosť, teda a + b > c, b + c > a, c + a > b. Ľahko zistíme, že všetky možnosti sú trojice: [1,7,7], [2,6,7], [3,6,6], [3,5,7], [4,5,6], [4,4,7], [5,5,5], teda **7 možností**

16. Mohli zjesť najviac **5 cukríkov.** Prečo? Najmenej bolo banánových cukríkov – 6. Predstavme si, že by Dui, Lui a Hui zjedli 6 alebo viac cukríkov. Potom by sa mohlo stať (áno, je to málo pravdepodobné, ale mohlo by sa stať..), že by zjedli presne týchto 6 banánových cukríkov. Potom by ale strýko Držgroš už z tohto druhu cukríky nemal, a to nechceme. Ak zjedia najviac 5 cukríkov, nemôže nastať situácia, že by „vyjedli“ všetky cukríky jedného druhu, lebo zo všetkých príchutí je cukríkov aspoň 6...

17. Toto je veľmi pekná úloha na deliteľnosť. Stačí si uvedomiť, že ak je číslo deliteľné nejakým číslom a, potom je deliteľné aj všetkými jeho deliteľmi. Napríklad ak je číslo deliteľné 30, potom je deliteľné aj 6,10 a 15. To znamená, že tri čísla, ktoré princ Bajaja napísal, sú deliteľné zároveň 6,10,15 aj 30. Ak teda napíše Bajaja na stenu 3 čísla deliteľné 30, stačí mu dopísať už len 5 čísel deliteľných 6 (aj tie prvé tri sú deliteľné 6 – spolu 8 čísel deliteľných 6), 3 čísla deliteľné 10 (aj tie prvé tri... spolu 6) a 2 čísla deliteľné 15 (aj tie prvé tri... spolu 5). Spolu je to najmenej 3 + 5 + 3 + 2 = **13 čísel**

18. Najprv vypočítame, koľko hračiek vyrobia všetci škriatkovia za 1 deň: 7700 . 20 = 154000 hračiek. Keďže spolu ich majú vyrobiť 2002000, bude im to trvať presne 2002000 : 154000 = 13 dní. S prácou teda musia začať 11.12. – keďže 24.12. sa už nepracuje, musia byť hračky v tento deň už hotové. A naozaj, od 11.12. do 23.12. je to práve 13 dní (11.,12.,13.,14.,15.,16.,17.,18.,19.,20.,21.,22.,23.)

19. Vieme, že obsah trojuholníka určíme zo vzorca:
$S = (a.v_a) : 2$ Pre náš Δ ABC: S = (|AB| . |BC|) : 2 Ak teda chceme určiť jeho obsah, potrebujeme poznať dĺžku strany BC. V pravidelnom šesťuholníku platí, že spojnice protiľahlých



vrcholov ho rozdeľujú na šesť rovnakých rovnostranných trojuholníkov. Dokreslime do nášho obrázka úsečku BD. Tak dostaneme dva z týchto trojuholníkov, Δ ABS a Δ CDS. Keďže sú rovnostranné a zhodné, platí: $|AC| = 2 . |AB| = 20$ cm. Z Pytagorovej vety vieme, že platí: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ Odtiaľ teda určíme veľkosť BC: $|BC| = 10.\sqrt{5}$ cm. Teda $S_{ABC} = (10 . 10.\sqrt{5}) : 2 =$ **$50.\sqrt{5}$ cm^2**

20. Priemernú výšku *n* ľudí určíme tak, že sčítame ich hmotnosti a súčet vydelíme číslom n. „Štyria najnižší“ sú zrejme traja najnižší a prostredný zo všetkých, „štyria najvyšší“ sú traja najvyšší a prostredný zo všetkých. Označme si súčet hmotností troch najnižších ako *a*, hmotnosť prostredného ako *b* a súčet hmotností troch najvyšších ako *c*. Potom podľa prvej vety bude pre priemernú výšku 4 najnižších platiť: $(a + b) : 4 = 167{,}5$ cm, pre priemernú výšku 4 najvyšších: $(b + c) : 4 = 180$ cm, a pre priemernú výšku všetkých: $(a + b + c) : 7 = 174$ cm.
Dostali sme tak sústavu 3 rovníc s tromi neznámymi, ktorej riešením sú čísla $a = 498$, $b = 172$, $c = 548$. Prostredný z nich mal teda výšku **172 cm.**