Lomihlav

... alebo záchrana Fantázie

Bastian vedel, že už nemôže čakať ani chvíľku. Vedel, že ak nezachráni Krajinu Fantázie, všetky sny a rozprávky navždy zmiznú zo sveta detí. Rýchlo sa teda pobalil do malého batôžka, aby na ceste nebol úplne odkázaný na milosť či nemilosť neznámych krajov, ktoré navštívi. Rozhodol sa, že si vezme aj svoje kamienky pre štastie.

1. Kamienky má rozdelené do viacerých vrecúšok. V každom vrecúšku je 50, 25, 20, 10, 5, 3, 2 alebo iba 1 kamienok. Koľko kamienkov bolo v každom z vrecúšok, ktoré si Bastian zbalil, ak vieme, že si vzal tri dvojice vrecúšok s rovnakým počtom kamienkov (spolu teda 6 vrecúšok) a spolu v nich bolo 96 kamienkov?

Riešenie: Bastian si zobral vrecúška s troma rôznymi obsahmi. Nemusíme uvažovať 6 vrecúšok, ale len tri s rôznymi obsahmi, v ktorých je polovica všetkých kamienkov, teda $96 : 2 = 48$ *kamienkov. Našou úlohou je teraz už len nájsť tri vrecúška s rôznym počtom kamienkov, ktorých súčet je 48. Po krátkom skúšaní určite všetci nájdeme jediné riešenie* $48 = 25 + 20 + 3$. *Bastian zobral dve vrecúška s 25 kamienkami, dve vrecúška s 20 kamienkami a dve vrecúška s troma kamienkami.*

Pribalil ešte nejaké jedlo, aby mu v brušku nevyhrávali cigáni... Ktovie, kedy sa znova vráti domov? Musí to ale nejako vymyslieť, aby nebol batoh priťažký.

2. Keby si vzal tri bagety a tašku jabĺk, bude jeho ruksak rovnako ťažký, ako keby si zbalil 12 veľkých mamkiných makovníkov. Taška jabĺk je rovnako ťažká ako jedna bageta a osem makovníkov. Koľko makovníkov má rovnakú hmotnosť ako taška jabĺk?

Riešenie: Jedna taška jabĺk je rovnako ťažká ako jedna bageta a osem makovníkov. Môžeme preto tri bagety a jednu tašku jabĺk nahradiť štyrmi bagetami a ôsmimi makovníkmi (3 bagety + 1 bageta + 8 makovníkov), ktoré majú rovnakú hmotnosť ako 12 makovníkov (podľa prvej vety zadania). Ak z obidvoch rovnako ťažkých kôpok zoberieme 8 makovníkov, dostaneme, že 4 bagety majú rovnakú hmotnosť ako 4 makovníky, preto aj jedna bageta musí byť rovnako ťažká ako jeden makovník. Z toho už ľahko zistíme, že ak taška jabĺk je taká ťažká ako 8 makovníkov a jedna bageta, ktorá je rovnako ťažká ako jeden makovník, jej hmotnosť sa rovná hmotnosti $8 + 1 = 9$ *makovníkov.*

Hotovo, v ruksaku už má jablká, bagety aj makovníky. Nakoniec neodolal a zbalil si z každého po troške. Naposledy sa poobzeral po svojej izbičke, aby sa rozlúčil. Tu mu pohľad skĺzol na fotografiu na stole. Je na nej jeho nevlastný brat Mathias spolu s otcom na oslave narodenín. Ako rád by si s otcom rozumel tak veľmi ako Mathias! No otec nechápe jeho sny a svet fantázie, do ktorého niekedy uteká. Bastianovi vypadla z oka malá slzička. Už už sa chystal zavrieť za sebou dvere, keď takmer narazil do Mathiasa. „Basti, neviem domácu úlohu! Prosím, prosím..." Usmial sa. Malému bračekovi predsa musí pomôcť. „No ukáž, čo máte robiť!"

3. Postupnosť 2, 3, 5, 6, 7, 10,... obsahuje prirodzené čísla, z ktorých žiadne nie je druhou ani treťou mocninou prirodzeného čísla. Nájdite 75-te číslo tejto postupnosti.

Riešenie: Načrtneme si riešenie skúšaním. Vidíme, že postupnosť tvoria prirodzené čísla, iba niektoré sú vynechané. Skúsime si teda zobrať prvých 80 prirodzených čísel a zistiť, koľko z nich sme vynechali. Vynechali sme druhé a tretie mocniny čísel. Druhých mocnín menších alebo rovných ako 80 je osem $(1^2, 2^2, \ldots, 8^2)$. *Tretie mocniny menšie alebo rovné ako 80 sú štyri* $(1^3, 2^3, 3^3, 4^3)$. *Musíme si však dať pozor, či sme niektoré čísla nevynechali dvakrát. A to sme urobili. Čísla 1 a 64* *sú totiž druhými i tretími mocninami. Preto sme z 80 čísel vynechali* $8 + 4 - 2 = 10$ *čísel. Teda prvých* $80 - 10 = 70$ *členov postupnosti je menších alebo rovných ako 80 a na 70. mieste je číslo 80 (lebo nie je druhou ani treťou mocninou). My však potrebujeme číslo na 75. mieste. Hľadáme číslo, ktoré je o 5 miest za číslom 80. Vieme, že číslo 81 je druhou mocninou, preto nebude členom postupnosti. Ďalších päť čísel však nie je ani druhou ani treťou mocninou, a preto na 75. mieste bude číslo 86.*

Keď sa im podarilo zvládnuť túto ťažkú domácu úlohu, vybehol Bastian konečne z domu. Vedel presne, kam ide. Do svojho obľúbeného kníhkupectva, kde sa už toľkokrát ukryl pred svojimi zlými spolužiakmi. Cestou zbadal pri kine najväčších frajerov celej školy, Adamovu bandu. Títo štyria chlapci sú v najvyššom ročníku a chodia už na rande s dievčatami. Vyhliadli si najkrajšie dievčatá a pozývajú ich von.

4. Tak sa stalo, že Adam, Braňo, Cyril a Dano mali štyrikrát spoločné rande s dievčatami Alica, Beáta, Cecília a Dáša. Na druhom rande boli spolu Adam s Beátou a Dano s Dášou. Na treťom rande tvorili dvojice Cyril s Cecíliou a Braňo bol vonku s Beátou. Štvrtýkrát sa stretli Cecília s Adamom a Alica s Braňom. Aké páry boli vonku na prvej schôdzke, ak žiadny pár nešiel spoločne von viac ako raz? (pozn. na každom rande boli 4 páry)

Riešenie: Najlepšie je zakresliť si tabuľku 5×5, *kde v prvom stĺpci budú mená dievčat a v prvom riadku 1. až 4. rande (v štvorčeku v prvom riadku a prvom stĺpci nebude nič). Do zvyšných štvorčekov budeme dopĺňať mená chlapcov, s ktorými boli dievčatá na jednotlivých rande. Celú situáciu si však skúsime opísať slovne. Nevieme, s kým boli na štvrtom rande Cyril a Dano. Mohli byť buď s Beátou alebo Dášou. Vieme však, že Dano už s Dášou bol na druhom rande, preto Dano musel byť na štvrom rande s Beátou a Cyril s Dášou. Už vieme, že Beáta bola na druhom rande s Adamom, na treťom s Braňom a na štvrtom s Danom, preto na prvom rande musela byť s Cyrilom. Zo zadania nevieme, s kým boli na treťom rande Adam a Dano. Mohli byť s Alicou alebo Dášou. Vieme však, že Dano už s Dášou bol na druhom rande, a preto na treťom rande boli Dano s Alicou a Adam s Dášou. Teraz už vieme, že Dáša bola na druhom rande s Danom, na treťom s Adamom, na štvrtom s Cyrilom, preto na prvom musela byť s Borisom. Zvyšné dva páry už nájdeme ľahko. Zostali nám Adam s Danom a Alica s Cecíliou. Vieme však, že Cecília bola s Adamom na štvrom rande, a preto na prvom rande boli Adam s Alicou a Cecília s Danom. Na prvej schôdzke bole tieto páry: Alica + Adam, Braňo + Dáša, Cyril + Beáta, Dano + Cecília.*

Konečne dorazil Bastian do kníhkupectva. Požičal si knihu s tajomným znakom na obale a utiahol sa s ňou do podkrovia v škole. Vtom začul niekde hlboko v sebe hlas smutnej princeznej z Fantázie. „Bastian... musíš nás zachrániť!“ S roztrasenými rukami otvára Bastian tajomnú knihu a ponára sa do jej príbehu... V zlomku sekundy sa ocitol v čudesnej krajine. Aké je tu všetko obrovské! Nemôže sa vynadívať na šialene vysoké vrchy a kamenisté útvary pripomínajúce obrovské sochy. S otvorenými ústami urobil prvých pár krokov. Ani si nestihol uvedomiť, čo sa vlastne deje, zrazu sa potkol a spadol na zem. „Au, kopol si ma do malíčka!“ ozval sa kameň, o ktorý zakopol. Vlastne nie, nebol to žiaden kameň, kamene predsa nerozprávajú. Bol to malý Kameňožrút, ktorý tu so svojím kamarátom Skaložrútom hral zaujímavú hru.

5. Na začiatku mali obaja rovnaký počet kameňov. V prvom kole vyhral Kameňožrút 20, v druhom prehral $\frac{2}{3}$ z toho, čo mal po prvom kole. Po dvoch kolách bol stav takýto: Kameňožrút mal štyrikrát menej kameňov ako Skaložrút. Koľko kameňov mali obaja „žrúti“ spolu?

Riešenie: Označme si neznámou x *počet kameňov, ktorý mal každý zo žrútov na začiatku. Po prvej hre mal Kameňožrút o 20 kameňov viac,* $x+20$ *kameňov, a Skaložrút o 20 menej,* $x-20$ *kameňov. V druhej hre Kameňožrút prehral* $\frac{2}{3}$ *toho, čo mal, teda mu zostala* $\frac{1}{3}$ *z kameňov, ktoré mal po prvej hre, tzn.* $\frac{1}{3}(x+20)$ *kameňov. Také isté množstvo kameňov, aké Kameňožrút prehral, Skaložrút vyhral. Po druhej hre tak Skaložrútovi pribudlo* $\frac{2}{3}(x+20)$ *kameňov, teda mal spolu* $x-20+\frac{2}{3}(x+20) = \frac{5}{3}x - \frac{20}{3}$

kameňov. Zároveň vieme, že na konci mal Kameňožrút štyrikrát menej kameňov ako Skaložrút. Budeme teda riešiť rovnicu

$$4 \times \frac{1}{3}(x+20) = \frac{5}{3}x - \frac{20}{3},$$

ktorej riešením je $x = 100$*. Každý zo žrútov mal na začiatku 100 kameňov, spolu mali 200 kameňov.*

„Prosím, poraďte mi! Ako nájdem princeznú Fantázie? Privolala ma sem a ja neviem, ako jej pomôcť!“ Žrúti práve dohrali svoju hru, a tak venovali kúsok pozornosti malému človiečikovi, ktorý sa ich nástojčivo pýtal na cestu k princeznej. „Júúúúúúj, maličký, to by si chcel od seba veľa! Palác princeznej je ďaleko! Ak sa tam naozaj chceš dostať, mal by si si zohnať koňa. Neďaleko odtiaľto je rieka. Chodieva sa tam napájať jeden ušľachtilý kôň, každý deň o určitej Hodine H. Ak tam budeš v správny čas, je tvoj!“

6. Kedy má ísť Bastian k rieke, ak vie, že čas, ktorý uplynie od poludnia po Hodinu H, tvorí tretinu času, ktorý uplynie od Hodiny H do polnoci?

Riešenie: Vieme, že po hodinu H uplynie jedna tretina času, ktorý uplynie od Hodiny H do polnoci. Označme čas, ktorý uplynie od hodiny H do polnoci, x*. Potom čas, ktorý uplynie od poludnia po hodinu H, je* $\frac{x}{3}$*. Od poludnia po polnoc tak uplynie* $\frac{x}{3} + x = \frac{4}{3}x$ *hodín. Neznámu* x *ľahko vyratáme, kedže vieme, že od poludnia do polnoci uplynie 12 hodín, preto* $x = 9$*. Od hodiny H do polnoci prejde 9 hodín, preto Bastian musí ísť k rieke o* $24 - 9 = 15$*–stej hodine.*

Bastian sa na chvíľočku zamyslel a hneď vedel, kedy sa má vybrať k rieke. Poďakoval sa teda žrútom a nechal ich hrať ich smiešnu hru ďalej. Pohľad na hodinky, ktoré dostal na narodeniny, mu pripomenul mamičku a to, ako veľmi mu chýba. Teraz na ňu ale nemôže myslieť, má väčšiu úlohu. Osud Fantázie je v jeho rukách. Rozhodol sa teda potichúčky sa prikradnúť k rieke a počkať, kým príde Hodina H. Po dlhej a namáhavej ceste sa k rieke naozaj dostal. Pozrel sa na hodinky a vydýchol si. „Mám ešte celú hodinu!“ Aké ale bolo jeho prekvapenie, keď zistil, že jeho hodinky stoja! Čo teraz? Bezradne sa poobzeral a zistil, že na tomto mieste naozaj čas stojí. Všetko bolo ako skamenené. Na brehu ale sedel malý tvor s ciferníkom na chrbte a naťahoval gumený kruh do rôznych tvarov. Bastian sa vybral rovno k nemu. „Kto si? Nevieš, prečo tu čas stojí, keď všade okolo plynie normálne?“ Malá potvorka zavrčala. „Viem, a čo je teba do toho? JA som ho zastavil! Som Časovlad a s časom si môžem robiť, čo chcem!“ „Dobre, ale prečo si ho zastavil?“ „Pretože ma nahneval! Hodiny, dni, ba týždne sa trápim nad týmto problémom a neviem ho vyriešiť! A ja chcem byť najlepší v celej Fantázii, chcem ho zvládnuť v zlomku sekundy! Tak som ho zastavil a pustím ho ďalej, až keď túto úlohu vyriešim. A už ma neotravuj!“ Bastian nechápal túto chorú túžbu byť najlepší. Hmm, niektoré tvory sú zvláštne. „Ukáž, pomôžem ti. Aký je problém?“ „Cha, a prečo by si to práve TY mal vedieť? No ale skús to!

7. Dĺžka tohto gumeného kruhu je 30 dm. Ohýbam ho do tvaru obdĺžnika tak, aby dĺžky jeho strán v dm boli celé čísla. Aký najväčší obsah môže mať takto vzniknutý obdĺžnik, ak gumu iba ohýbam, jej dĺžka sa nezväčšuje ani nezmenšuje?“

Riešenie: Čo vlastne táto úloha hovorí v reči matematiky? Časovlad vytvára obdĺžniky, z ktorých každý má obvod 30 dm (dĺžka gumy) a dĺžky jeho strán v dm sú celé čísla. Spomedzi nich hľadáme ten, ktorý má najväčší obsah. Vieme, že pre obdĺžnik platí $o = 2(a+b)$*, tzn.* $a + b = \frac{o}{2}$*. V našom prípade* $a + b = 15$ *dm. Skúsme si teda vypísať všetky možnosti, aké môžu byť dĺžky strán. Postupným vypisovaním dostaneme:* $(1, 14)$, $(2, 13)$, $(3, 12)$, $(4, 11)$, $(5, 10)$, $(6, 9)$, $(7, 8)$*. Ak si pre tieto dvojice strán vypočítame príslušné obsahy, zistíme, že maximálny obsah je pri rozmeroch* $a = 7, b = 8$ *(príp. naopak, samozrejme), a to* $56cm^2$*.*

Našťastie sa Bastianovi podarilo vyriešiť Časovladov problém a čas bol opäť v poriadku. Tak, ostáva ešte počkať necelú hodinu a Hodina H príde! Ako si tak čupel za hustými kríkmi, zbadal na zemi čosi zvláštne. V hline boli napísané akési znaky, Bastian si domyslel, že to môžu byť čísla.

Niektoré cifry ale chýbali. Možno tieto čísla nič neznamenali, Bastian ich ale z dlhej chvíle dal do súvislosti. Skúste mu pomôcť vyriešiť takýto problém:

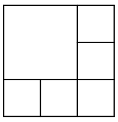
7. Máme trojciferné číslo $2A4$ (stredná cifra chýba). Ak k nemu pripočítame 329, dostaneme číslo $5B3$. Aká je maximálna možná hodnota číslice A, ak vieme, že $5B3$ je deliteľné 3?

Riešenie: Skúsme najprv porozmýšľať, aká číslica je skrytá za písmenom B. Aby číslo $5B3$ bolo deliteľné tromi, musí byť súčet jeho cifier tiež deliteľný tromi. Písmeno B tak môžeme nahradiť číslicami 1, 4 alebo 7. Nahradením písmena B vhodnou číslicou dostaneme čísla 517, 547 alebo 577. Od týchto čísel odpočítame číslo 329 (lebo v zadaní sme k číslu $2A4$ pripočítali 329 a teraz vlastne robíme spätnú operáciu) a dostaneme čísla 184, 214 alebo 244. Zápisu $2A4$ vyhovujú iba posledné dve, z ktorých väčšiu cifru na mieste desiatok má číslo 244. Najväčšia možná hodnota písmena A je 4. Existuje viacero spôsobov, ako je možné tento príklad riešiť. Skúste si, či by ste ho nevedeli vypočítať aj pomocou dekadického zápisu.

Bastiana tento problém tak zaujal, že si ani neuvedomoval, ako mu čas ubieha. Zrazu ale... pssssst, niečo sa deje! K Hodine H je ešte ďaleko, no k rieke sa blíži nejaký kôň. Pricválal rýchlym tryskom a zastal len pár metrov od miesta, kde sa schováva Bastian. A nie je sám, je na ňom jazdec! Mladý, indiánsky pôsobiaci chlapec zoskočil a začal sa so svojím tátošom rozprávať. „Toto je posledná časť. Musí byť niekde tu. Cítim, že je blízko!“ Z vrecúška vytiahol mapu Fantázie, na ktorej bolo vyznačené veľké štvorcové územie rozdelené na šesť menších štvorcov. „Pozri, prehľadali sme týchto päť častí podrobne a nenašli sme nič, musí byť niekde tu!“ Nakreslite rozdelenie mapy, ktorú záhadný Indián držal v ruke!

8. Rozdeľte štvorec na šesť menších štvorcov (nemusia byť rovnaké, štvorce sa nemôžu prekrývať).

Riešenie:



Bastian ani nedýcha. Odrazu mu Indián zmizol z dohľadu. Čo to? Kam sa podel? „Kto si, cudzinec?“ ozvalo sa mu za chrbtom a na pleci pocítil istú ruku. „Ja... ja... ja... som Bastian a... “ „Bastian?“ potešil sa Indián. „Hľadám ťa už sedem dní a nocí. Som Atrey. Počul som, že si prišiel do našej krajiny. Poď, pôjdeš so mnou. Som práve na ceste za princeznou. Tu je tvoj kôň!“ Práve vtedy udrela Hodina H a k vode prišiel nádherný biely kôň. Bastian ničomu nerozumie. Ako vo sne ale vysadol na koňa a spolu s Atreyom uháňali nevedno kam. Zastavili sa až v malom domčeku, ktorý stál v dlhom rade rovnakých domov.

9. Domčeky v tomto rade sú označené postupne číslami od 1 po 100. V každom dome býva toľko ľudí, aký je súčet cifier čísla domu (napr. v dome č. 23 býva $2 + 3 = 5$ ľudí). Koľko ľudí býva vo všetkých domoch?

Riešenie: Úlohu si preložíme do matematickej reči. Chceme nájsť súčet cifier čísel od 1 po 100. Súčet cifier od 1 po 9 spočítame ľahko, $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. *Poďme teraz vypočítať súčet cifier dvojciferných čísel, teda čísel od 10 po 99. Ako prvý vypočítame súčet cifier na mieste jednotiek. V každej desiatke (od 10 po 19, od 20 po 29,...) sú cifry od 0 po 9 a ich súčet je 45. Takýchto desiatok je deväť (začínajú ciframi 1 až 9), preto súčet cifier na mieste jednotiek bude* $9\times 45 = 405$. *Na mieste desiatok budeme znova počítať s 'našimi' desiatkami. V prvej je desať jednotiek, v druhej desať dvoják, až v poslednej desať deviatok. Môžeme to zapísať aj* $10 \times 1 + 10 \times 2 + \ldots + 10 \times 9 = 10 \times (1 + 2 + \ldots + 9) = 10 \times 45 = 450$. *Ešte nám zostalo číslo 100, ktorého ciferný súčet je 1. Súčet cifier všetkých čísel od 1 po 100 dostaneme sčítaním všetkých čiastkových súčtov:* $45 + 405 + 450 + 1 = 901$.

V domčeku číslo 100 sa chlapci unavení cestou občerstvili, doplnili zásoby a oddýchli si, aby mali veľa síl na ďalšiu cestu. Nezohriali sa tu ale dlho. Opäť nasadli na svoje kone a uháňali ďalej. Po dlhej a únavnej ceste konečne zbadali palác princeznej. Stojí na vysokánskom kamennom stĺpe a vyzerá, ako keby sa vznášal v oblakoch. „Ako sa tam dostaneme? Na to naše kone nestačia!“ trápi sa Bastian. „Neboj sa, vynesie nás tam jedno zo vznášadiel. Musíme ale prísť na to, ktoré je to správne! Lieta ich tu veľa, no iba tie, ktoré majú jednu zaujímavú vlastnosť, nás vynesú hore k princeznej. Ostatné by nás odniesli na miesto, ktoré je tak ďaleko, že si to nevieme ani predstaviť!“ „A aká je to vlastnosť?“ „No, keď sa na ne pozrieš, vidíš, že sú to rôzne telesá s hranami.

10. Ak sa dá prejsť jedným ťahom po všetkých hranách telesa tak, že po každej hrane prejdeš práve raz, potom je toto vznášadlo to správne! Chápeš?“ „Myslím, že áno!“ odpovedal Bastian. Viete im poradiť, do ktorého vznášadla majú nasadnúť, ak majú pred sebou tieto tri: kocka, pravidelný štvorsten a pravidelný osemsten? (pravidelný štvorsten je teleso, ktorého steny sú 4 rovnostranné trojuholníky a pravidelný osemsten dostaneme, ak vezmeme dva pravidelné štvorboké ihlany a „zlepíme“ ich štvorcovými podstavami)

Riešenie: Zoberme si kocku. Z každého vrcholu kocky vychádzajú tri hrany. Zoberme si jeden konkrétny vrchol. My chceme prejsť všetkými hranami, preto musíme prejsť aj troma, ktoré vychádzajú z „nášho“ vrcholu. Zabudnime na chvíľu na začiatok a koniec krivky (čiary, ktorá je zložená z niekoľkých úsečiek), ktorou chceme prejsť celú kocku. Ak krivka „vchádza“ do nejakého bodu, musí z neho aj „vyjsť“. Ak sa raz rozhodneme, že krivka pôjde cez nejaký bod, musíme myslieť na to, že chce z neho aj vyjsť. Potrebujeme teda vždy dve úsečky, ktoré vychádzajú z jedného bodu. Ak sa rozhodneme, že chceme pretnúť krivkou nejaký bod viackrát, potrebujeme dvojnásobný počet úsečiek (skús si poriadne premyslieť, prečo). Výnimka je jedine pri začiatku a konci krivky, kde vlastne iba vychádzame (začiatok) alebo vchádzame (koniec) do bodu a stačí nám len jedna úsečka z daného bodu. Ak sa poriadne zamyslíme nad tým, na čo sme prišli, zistíme, že krivku vieme viesť iba cez telesá, v ktorých zo všetkých vrcholov vychádza párny počet hrán (začiatok a koniec krivky sú v jednom bode) alebo keď z dvoch vrcholov vychádza nepárny počet hrán a zo zvyšných párny (začiatok a koniec krivky sú v rozdielnych bodoch). Tieto pravidlá spĺňa iba jedno z telies, a to osemsten.

Ani opísať sa nedá, aký pohľad sa naskytol Bastianovi, keď vošli do paláca. Je to kráľovský palác Ríše Fantázie, preto najúžasnejší je vo fantázii každého, kto vie snívať. Prešli ohromnými chodbami a sieňami, až sa ocitli v Sieni Snov.

10. Tu už na nich čakala princezná a Rada Ríše. Tá pozostáva z piatich členov - niekoľkých mužov a niekoľkých žien. Bastian si všimol, že sú rozsadení tak, že by sa to dalo popísať takto:

- aspoň jedna zo stoličiek 1 a 3 patrí žene
- zo stoličiek 2 a 5 práve jedna patrí mužovi
- na stoličkách 2 a 3 sedia osoby rovnakého pohlavia
- na stoličkách 3 a 4 sedia osoby rozličného pohlavia
- najviac jedna zo stoličiek 1 a 5 patrí mužovi

Zistite všetky možnosti rozsadenia členov Rady Ríše Fantázie.

Riešenie: Najprv si jasne povieme, čo znamenajú niektoré slovíčka. „Aspoň jeden“ znamená, že potrebujeme jeden alebo viac niečoho, „práve jeden“, že iba jeden, ani viac, ani menej, „najviac jeden“, že jeden alebo menej. Začnime druhou podmienkou. Prečo? Lebo prvá možnosť nám viac dovoľuje, namiesto práve je tam aspoň. Nech zo stoličiek 2 a 5 patrí mužovi stolička 2, a teda stolička 5 patrí žene. Potom podľa (3.) aj na stoličke 3 sedí muž. Podľa (4.) na stoličke 4 sedí *žena a podľa (1.) na stoličke 1 sedí žena, kedže na stoličke 3 sedí muž. A máme prvú možnosť. Nech teraz zo stoličiek 2 a 5 patrí mužovi stolička 5, a žene teda stolička 2. Potom podľa (3.) sedí na stoličke 3 žena, podľa (4.) na stoličke 4 sedí muž a na stoličke 1 sedí podľa (5.) muž. Máme druhú možnosť. Musíme ešte raz skontrolovať, či obe usporiadania pri stole spĺňajú všetky podmienky. Spĺňajú. Máme dve možnosti: Ž M M Ž Ž alebo Ž Ž Ž M M.*

Bastian sotva dýcha. Tak veľmi sa tešil na princeznú, že nevie zakrývať zvedavosť a radosť, ktorú má v sebe. Ako veľmi ho ale zabolelo, keď zbadal, aká je slabučká! Princezná leží na lôžku, v ruke zviera zvláštny medailón a nevládze ani rozprávať. Len jej krehká ruka sa naťahuje za Atreyom a podáva mu Orin, medailón kráľovskej rodiny. „Choďte! Ste naša posledná nádej. Fantázia umiera... Ale na to, čo máte urobiť, musíte prísť vy sami!“ ozval sa Arphir, jeden z členov Rady. Z obrovskej kráľovskej knižnice dostali chlapci jednu z mnohých máp Fantázie, tentokrát nebol na nej vyznačený štvorec, ale kruh rozdelený na niekoľko častí štyrmi rovnými čiarami.

11. Na koľko najviac a na koľko najmenej častí možno rozdeliť kruh štyrmi priamkami? Pritom vieme, že priamky nie sú zhodné a každá z nich pretína kružnicu ohraničujúcu tento kruh v dvoch bodoch (tzn. nie sú to dotyčnice, ale sečnice tejto kružnice).

Riešenie: Najprv si uvedomme, čo robí priamka s rovinou, prípadne časťou roviny, ktorú pretína. Správne, delí ju na dve časti. Ak potom pridáme k nej ďalšiu priamku, ktorá sa s ňou pretne, z ich priesečníka budú na tejto „novej“ priamke „vychádzať“ dve polpriamky, z ktorých každá rozsekne jednu z častí, ktoré sme dostali prvou priamkou (skús si to nakresliť!). Ak ale pridáme priamku, ktorá sa s prvou nepretína, rozsekneme iba jednu z častí roviny, teda v tomto prípade máme menej nových častí. To je skutočnosť, s ktorou budeme narábať po celý čas pri riešení tejto úlohy. Pozrime sa najprv na úlohu s minimálnym počtom častí. Prvou priamkou rozdelíme kruh na dve časti (inú možnosť nemáme, keďže priamka nie je iba dotyčnica, ale sečnica kružnice, určite nám kruh „rozsekne“ na dve časti). Ako teraz budeme viesť druhú priamku? Môžeme ju narysovať tak, že sa vo vnútri kruhu pretne s prvou priamkou, alebo tak, že sa s ňou vo vnútri kruhu nepretne (napríklad priamka rovnobežná s prvou, to ale nie je jediná možnosť). V prvom prípade tak dostaneme štyri časti kruhu, v druhom iba tri. Teda pre nás je výhodnejšia druhá možnosť. Takto postupujeme ďalej, pričom sa snažíme každou ďalšou priamkou nepreťať žiadnu z predchádzajúcich vo vnútri kruhu. Po štyroch priamkach tak dostaneme 5 častí. Čo s maximálnym počtom? Postupujeme presne naopak. Snažíme sa preťať čo najviac priamok, ktoré už máme. Prvou priamkou rozsekneme kruh na dve časti. Druhú vedieme tak, aby sa v kruhu preťala s prvou, tretiu tak, aby preťala obe predchádzajúce... Keď si to nakreslíme, ľahko zistíme, že takto dostaneme najviac 11 častí. Kruh vieme štyrmi priamkami rozdeliť maximálne na 11, minimálne na 5 častí.

A tak sa Atrey a Bastian vydali na svoju dlhú cestu nevediac, kam vlastne mieria. Po nejakom čase, nik už nevie, ako dlho to bolo (a, koniec koncov, je to vlastne jedno :), dorazili k domu manželov Greedyovcov. Greedyovci sú čudesní malí ľudkovia, ktorí pripomínajú skôr škriatkov. Žijú si vo svojom domčeku a po celý svoj život si čosi odkladajú. Odkladajú si staré fotografie, zvyšné jedlo, obnosené oblečenie, peniaze, peniaze a ešte aj peniaze. Bastian si všimol, že krajina okolo ich domčeka akoby sa strácala kdesi v hmle. Vlastne... akoby tam ani nebola. Zmizla? Čo sa tu deje? Zvláštne, hmm... Chlapci neisto zaklopkali na dvere. O chvíľku sa v nich objavila hlava Gerarda Greedyho a za ním vykukovala jeho žena Erna. Práve ich vyrušili pri rátaní peňazí, ktoré ušetrili za posledný mesiac. Skúsite im pomôcť pri prerátavaní?

12. Ernin príjem je $\frac{5}{8}$ z Gerardovho príjmu. Ernine náklady sú polovičné oproti Gerardovým nákladom. Erna tak svojím hospodárením ušetrí 40% svojho príjmu. (to, čo človek ušetrí, je rozdiel medzi jeho príjmami a nákladmi). Akú časť svojho príjmu (v percentách) ušetrí Gerard?

Riešenie: Označme si príjem Gerarda x. Vieme, že Erna zarobí $\frac{5}{8}$ z toho, čo Gerard, teda $\frac{5}{8}x$. Erna ušetrí 40% príjmu, druhá časť zárobku $100\% - 40\% = 60\%$ sú jej náklady. Pomocou x(Gerardovho *príjmu) si môžeme jej náklady vyjadriť ako* $0,6 \times \frac{5}{8}x = \frac{3}{8}x$. *Ernine náklady sú polovičné oproti Gerardovým, teda Gerardove náklady dvojnásobné oproti Erniným* $2 \times \frac{3}{8}x = \frac{3}{4}x$. *Ak Gerard minie* $\frac{3}{4}$ *svojho zárobku, zvyšok* $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ *si ušetrí. A ľahko vieme, že* $\frac{1}{4} = 0,25$*, čo je 25%.*

Sklamaní sa chlapci vydali ďalej. U Greedyovcov nenašli spôsob, ako zachrániť Fantáziu. Bastianovi ale stále hlavou vŕta to zvláštne prázdno, ktoré sa rozlieha okolo ich domu. Čo to len môže znamenať? Tieto myšlienky ho prenasledovali po celý čas, kým nedorazili k velikánskemu tunelu, na ktorý narazili pri svojom cestovaní Fantáziou. Fíha, čo je to za tunel? To treba preskúmať! Atrey nesmelo urobil prvé kroky dovnútra. Bastian ho nasledoval. Všade úplné ticho... To ešte ani jeden z nich netušil, aké nebezpečenstvo tu na nich čaká. V tomto tuneli totiž sídlia detské nočné mory, upíri, strigy, draci, pavúky a všetky potvory, ktorých sa v noci bojíme a modlíme sa, aby boli rýchlo preč... Odrazu sa Bastianovi čosi lepkavé prilepilo na tvár. „Fuj, to vyzerá ako vlákno pavučiny! Fuj...“ A naozaj, bolo to jedno z neuveriteľne tučných slizkých vlákien, ktorými si veľký pavúk Arachnares začínal splietať svoju ohavnú sieť. Zatiaľ je ale naozaj len na začiatku, stihol natiahnuť len tri vlákna.

13. O týchto vláknach platí, že sú natiahnuté tak pevne, že majú tvar úsečiek spájajúcich nejaké body na obvode tunela (predpokladajme, že obvod tunela je kružnicový) a rozdeľujú ho na tri oblúky. Dĺžka prvého oblúka je polovicou dĺžky druhého a tretinou dĺžky tretieho oblúka. Aké veľké uhly zvierajú jednotlivé dvojice vláken?

Riešenie: Nakreslime si k tomuto príkladu obrázok. Ako vyzerajú pavúčie „vlákna“? Prierez tunelom si môžeme predstaviť ako kružnicu a vlákna ako strany trojuholníka, ktorý je do tejto kružnice vpísaný. Označme ho ABC *a nech stred kružnice je* S. *Ku každému oblúku kružnice prislúcha jeden stredový uhol (uhol, ktorý má vrchol v strede kružnice). K oblúku* AC *prislúcha* $\sphericalangle ASC$, *k oblúku* BC *zasa* $\sphericalangle BSC$ *a k oblúku* AB *prislúcha* $\sphericalangle ASB$. *Teraz si stačí uvedomiť, že ak oblúk* AC *je polovicou dĺžky oblúka* BC, *potom aj uhol* $\sphericalangle ASC$ *bude polovicou uhla* $\sphericalangle BSC$. *Prečo? Lebo oblúk* BC *vieme rozdeliť na dva oblúky s dĺžkou rovnakou ako je dĺžka oblúka* AC, *a tým obom prislúcha rovnako veľký uhol ako je* $\sphericalangle ASC$ *(skúste si to poriadne premyslieť!) Rovnakým spôsobom prídeme na to, že* $|\sphericalangle ASB| = 3 \times |\sphericalangle ASC|$. *A keďže platí* $|\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle BSC| + |\sphericalangle ASC| = 360°$, *ľahko vypočítame, že* $|\sphericalangle ASB| = 180°$, $|\sphericalangle BSC| = 120°$, $|\sphericalangle ASC| = 60°$. *To, že* $|\sphericalangle ASB| = 180°$, *znamená, že body* A, B, C *ležia na jednej priamke. Pozrime sa teraz na* $\triangle ASC$ *a* $\triangle BSC$. *Oba sú rovnoramenné (strany, ktoré sú polomermi kružnice, sú rovnaké), preto každý z nich má uhly pri základni rovnaké. Vypočítame ich veľkosť:* $|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA| = \frac{180°-60°}{2} = 60°$, $|\sphericalangle SCB| = |\sphericalangle SBC| = \frac{180°-120°}{2} = 30°$. *Teraz už ľahko dopočítame, že pre hľadané uhly platí* $|\sphericalangle BAC| = 60°$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$ *a* $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACS| + |\sphericalangle BCS| = 90°$.

Pavučina Bastiana tak vydesila, že podvedome vytiahol Orin a vystrčil ho pred seba do tmy. Orin sa rozžiaril jasným zlatým svetlom a na malý okamih ožiaril celý tunel. Tu chlapci zbadali všetky nočné mory, ako sa skrývajú pred jeho mocou. „Poďme odtiaľto!“ vykríkol Bastian a stiahol Atreya za sebou. Vydesení vybehli von z tunela, no tam to nebolo oveľa lepšie. Nestihli sa ani spamätať zo šoku v tuneli, už okolo nich úžasnou rýchlosťou prebehol splašený jednorožec, ktorého zjavne čosi vydesilo. Aj Bastianov a Atreyov kôň sa splašili a rozbehli sa za jednorožcom.

14. Cválali až k mostu, ktorý bol vzdialený 1000 m. Vo chvíli, keď jednorožec prebehol cez most, bol 200 m pred Atreyom a 400 m pred Bastianom. Koľko metrov pred Bastianom bol Atrey na svojom koni, keď Atrey prebehol cez most? Oba kone i jednorožec nemenia pri behu svoju rýchlosť.

Riešenie: Vieme, že keď jednorožec prebehol cez most, Atrey prebehol $1000 - 200 = 800$ *metrov a Bastian* $1000 - 400 = 600$ *metrov. Na dráhe 800 metrov tak Atrey získal pred Bastianom náskok* $800 - 600 = 200$ *metrov. Našou úlohou je zistiť, aký bol Atreyov náskok na dráhe 1000 metrov. Stačí si uvedomiť, že náskok narastá priamo úmerne s ubehnutou dráhou. Príklad vyrátame pomocou* *trojčlenky. Na 800 metrov získa Atrey náskok 200 metrov, koľko získa na dráhe 1000 metrov? Zostavíme rovnicu:* $1000 \div 800 = x \div 200$, *ktorej riešením je* $x = 250$. *Keď Atrey prebehol cez most, mal náskok 250 metrov pred Bastianom.*

„Čo to, prepánajána, bolo?!" pýta sa sám seba udychčaný Bastian. Obzrel sa a vtedy pochopil, pred čím jednorožec utekal. Celá krajina za nimi, obrovský kus Fantázie, zmizol v prázdnote. Pred jeho očami bolo len obrovské NIČ. „Atrey, to je ono! Fantázia umiera, pretože deti už zabúdajú snívať! V ich fantázii a snoch sa rozťahuje Ničota! Proti nej musíme bojovať! Paráda, Atrey, snívaj! Vymysli si niečo, čokoľvek, niečo, čo napadne iba teba, pretože tvoja fantázia je originálna! Ak budeme mať svoju fantáziu, Ničota sa môže niekam schovať!" Bastian hneď začal. Vymýšľal si všelijaké veci, ktoré v normálnom reálnom svete nenájdete. Napríklad čarovný opasok.

15. Čarovný opasok v tvare obdĺžnika má tú vlastnosť, že kedykoľvek si jeho majiteľ niečo praje, zmenší sa dĺžka opasku na $\frac{1}{2}$ aktuálnej dĺžky a šírka na $\frac{1}{3}$ aktuálnej šírky. Po troch takých prianiach mal opasok obsah 4 cm^2. Aká bola jeho pôvodná dĺžka, ak pôvodná šírka bola 9 cm?

Riešenie: Existuje viacero spôsobov, ako nájsť riešenie. Načrtneme si jedno z nich. Označme si dĺžku opasku a a šírky opasku b. Čo sa stane s obsahom opasku po jednom priani? Na začiatku má opasok obsah ab, po splnení priania sa však dĺžka opasku zmenší na polovicu, tj. $\frac{1}{2}a$, *a šírka opasku na tretinu, tj.* $\frac{1}{3}b$. *Obsah opasku po splnení priania je* $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{3}b = \frac{1}{6}ab$. *Vidíme, že obsah opasku sa zmenšil na* $\frac{1}{6}$ *pôvodného obsahu, alebo inak povedané, zmenšil sa šesťkrát, alebo ešte inak povedané, pred prianím mal 6-krát väčší obsah. My vieme, že po troch prianiach mal obsah 4 cm*^{2}. *Poďme na to odzadu. Pred posledným prianím, teda po druhom priani, mal opasok 6-krát väčší obsah ako na konci,* $6 \times 4cm^2 = 24cm^2$. *Pred druhým prianím, teda po prvom priani, mal opasok 6-krát väčší obsah ako po druhom priani,* $6 \times 24cm^2 = 144cm^2$. *Na začiatku mal obsah 6-krát väčší ako po prvom priani,* $6 \times 144cm^2 = 864cm^2$. *Obsah pôvodného opasku bol 864 cm*^{2}, *a ak vieme, že jeho šírka bola 9 cm, jeho dĺžku získame podielom obsahu a šírky. Pôvodná dĺžka opasku bola 864 cm*$^2 \div$*9 cm=96 cm.*

16. Atrey si zasa vymyslel kruhovú obruč, ktorá obopína celú, celučičkú Zem tak, že po celej svojej dĺžke tesne prilieha k zemskému povrchu. A naozaj, pred ich očami sa po zemi odrazu tiahla obrovská obruč. Potom si predstavil, že s ňou môže čokoľvek robiť. Povedal si teda, že chce túto obruč predĺžiť o jeden meter. Po tomto predĺžení už nepriliehala tesne k povrchu, ale bola po celej dĺžke rovnaký kúsok nad zemou. Chlapcov veľmi prekvapilo, ako vysoko sa týmto nepatrným predĺžením obruč „zodvihla" od povrchu. Čo myslíte, ako vysoko bola obruč nad zemou po predĺžení?

Riešenie: Na túto úlohu budeme potrebovať vzorec na výpočet obvodu kruhu – $o = 2\pi r$. *Môže nás zmiasť, že nemáme daný polomer Zeme. To však nevadí, označíme si ho z (v metroch) a uvidíme, že nakoniec sa nám odčíta a nebudeme potrebovať jeho presnú dĺžku. Ak obruč priliehala tesne k Zemi, mala polomer z a obvod* $2\pi z$. *Potom sme obruč predĺžili o 1 meter, obvod obruče sa zmenil na* $2\pi z + 1$. *Ak poznáme obvod kružnice, jej polomer vypočítame ako podiel jej obvodu a dvojnásobku čísla* π $(r = \frac{o}{2\pi})$. *Pri obvode* $2\pi z{+}1$ *bude polomer obruče* $r = \frac{2\pi z+1}{2\pi} = \frac{2\pi z}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = z + \frac{1}{2\pi}$. *My chceme vypočítať, o koľko sa zväčšil polomer obruče. Vypočítame ho ako rozdiel polomeru obruče zväčšenej o meter a pôvodnej obruče:* $(z + \frac{1}{2\pi}) - z = \frac{1}{2\pi} = 0,159$ *m.*

Chlapci sa pomaly vydali na cestu späť do paláca princeznej, aby sa presvedčili, či naozaj toto je to, čo dokáže Ríšu Fantázie zachrániť. Celou cestou si vymýšľali najrôznejšie budovy, hračky, čarovné predmety, strašidlá, víly, princezné, obrov i škriatkov, rozprávali si príbehy a smiali sa, vymýšľali dokonca nové hry a súťaže. A popri ceste, ktorou šli, pomaličky zvädnuté kvety dvíhali svoje hlávky a krajina ožívala. Asi ale vymýšľali pridlho, lebo Bastian prešiel od víl a rozprávkových bytostí k tomu, že vymyslel Atreyovi matematickú úlohu :) Pomôžte Atreyovi ju vyriešiť:

17. Majme trojuholník ABC a body D, E, F na stranách AB, BC a AC, pre ktoré platí: $|AD| = |DF|$ a $|BD| = |DE|$. Ak uhol pri vrchole C je $40°$, aký veľký je uhol EDF?

Riešenie: Označme si veľkosti uhlov BAC a ABC gréckymi písmenami α a β. Trojuholníky ADF a BDE sú rovnoramenné so základňami AF a BE, pretože $|AD| = |DF|$ a $|BD| = |DE|$ zo zadania. V rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základni zhodné. Môžeme dopočítať zvyšné uhly v trojuholníkoch.

$$|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle FAD| = \alpha \quad |\sphericalangle ADF| = 180° - 2\alpha$$
$$|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle DBE| = \beta \quad |\sphericalangle BDE| = 180° - 2\beta$$

Potom si už vieme vyjadriť aj hľadaný uhol pomocou uhlou α a β.

$$\begin{aligned} |\sphericalangle EDF| &= |\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle ADF| - |\sphericalangle EDB| = 180° - (180° - 2\beta) - (180° - 2\beta) \\ &= 2\alpha + 2\beta - 180° = 2(\alpha + \beta) - 180° \end{aligned}$$

My však vieme zistiť súčet α a β, sú to totiž vnútorné uhly trojuholníka ABC a tretí uhol poznáme. Preto $\alpha + \beta = 180° - |\sphericalangle ACB| = 180° - 40° = 140°$. Teraz už vieme vypočítať aj hľadaný uhol. $|\sphericalangle EDF| = 2(\alpha + \beta) - 180° = 2(140°) - 180° = 100°$.

V paláci už vládla radostná atmosféra a princezná v prekrásnych šatách vítala prichádzajúcich chlapcov. „Ďakujem, Atrey, ďakujem, Bastian! Ak neprestanete snívať, nikdy nezomrieme. Nedovoľte, aby fantázia detí umrela. Potrebujeme vás a vašu predstavivosť, lebo to sme my. No, ale dosť bolo rečí, poďme oslavovať! Musíte byť unavení.“ Bastian s Atreyom sa na seba uškrnuli - to bola jedna z prvých vecí, ktoré si predstavili na svojej ceste - hostina s princeznou. Oslavovalo sa dĺĺĺĺĺho predlho, kým Bastian nezaspal. Prebudil sa v kníhkupectve, späť v reálnom svete. „Neboj sa, princezná, nikdy nezabudnem snívať,“ povedal potichy, zavrel knihu a odložil ju do poličky, z ktorej ju predtým vzal. Tak, a ide sa domov! Ako ale Bastian zvykne, cestou už znova premýšľal o kadejakých výpočtoch.

18. Spočítal si, že mu cesta z domu do kníhkupectva a späť (po tej iste trase) trvá presne hodinu. Keď ide hore kopcom, ide rýchlosťou 2 km/h, dole kopcom ide rýchlosťou 6 km/h, a po rovine rýchlosťou 3km/h. Koľko km meria cesta Bastianov dom – kníhkupectvo a späť?

Riešenie: Vieme, že Bastian šiel tam aj späť rovnakou cestou. To znamená, že vzdialenosť, ktorú cestou do kníhkupectva prešiel hore kopcom, prešiel potom cestou domov dole kopcom a naopak. Označme si teraz jednotlivé úseky cesty neznámymi. Nech dĺžka úseku, ktorý cestou tam prešiel Bastian hore kopcom, je x km, dole kopcom y km a po rovine z km. To znamená, že cestou spät prešiel vzdialenosť y km hore kopcom, x km dole kopcom a po rovine rovnako, z km. Spolu teda tam aj späť prešiel hore kopcom $x + y$ km, dole kopcom $x + y$ km a po rovine $z + z = 2z$ km. Teraz využime, čo vieme z fyziky. Pre pohyb platí $t = \frac{s}{v}$, kde s je dráha a v je rýchlosť. Potom pre jednotlivé úseky Bastianovej cesty platí: $t_1 = \frac{x+y}{2}$ (čas cesty hore kopcom), $t_2 = \frac{x+y}{6}$ (čas cesty dole kopcom), $t_3 = \frac{2z}{3}$ (čas cesty po rovine). Celá cesta spolu trvala Bastianovi 1 hodinu, teda platí $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Teraz už stačí dosadiť za jednotlivé časy $\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{6} + \frac{2z}{3} = \frac{2}{3}(x + y + z) = 1$ Odtiaľ už ľahko dostaneme $2(x + y + z) = 3$, čo je presne vzdialenosť, ktorú chceme zistiť. Spolu teda Bastian prešiel 3 km.

Bastian sa teda napokon vrátil domov, späť k svojmu otcovi a malému Mathiasovi. Koniec príbehu? Ale kdeže, ten sa práve začína! Veď fantázia a snívanie nemá hranice!

Hádanky

1. Biele pole, čierne pole, jedno hore, druhé dole, na tých poliach rastú tóny ako smiech aj ako stony. Čo je to?

Riešenie: rívalk

2. Zimou sa začína, ináč sa nekončí. Dáme ho na stenu. Každému pred oči. Čo je to?

Riešenie: rádnelak

3. Slniečko sklenené visí nám na stene, avšak v jeho lúči kvietok nevypučí. Čo je to?

Riešenie: apmal

4. Hádaj, ktorý mech skrýva biely sneh?

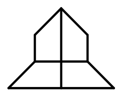
Riešenie: anirep

5. Ako veľký had, zdá sa akurát. Očiek na ňom fúra, iných než má kura. A keď príde tuhý mráz, zahreje nás, a nie raz!

Riešenie: láš

Hlavolamy

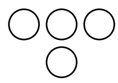
1. Rozdeľte raketu na štyri zhodné časti.

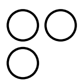


Riešenie:

Pozri obrázok.

2. Na stole ležia 4 mince tak ako na obrázku. Vo vodorovnom rade sú tri mince a vo zvislom rade sú dve mince. Premiestnite jedinú mincu tak, aby v oboch radoch boli 3 mince.





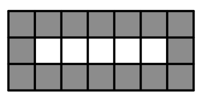
Riešenie: Bočnú mincu položíme na strednú.

3. Doplň nasledujúce číslo v postupnosti

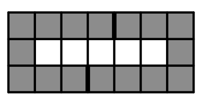
$$1, 4, 6, 8, 9, 10, ? \ldots$$

Riešenie: Je to postupnosť čísel, ktoré nie sú prvočíslami. Ďalšie číslo je 12.

4. Máme obdĺžnik 7×3 a v jeho strede je obdĺžnikový otvor s rozmermi 5×1 ako na obrázku. Ako máme zafarbenú oblasť rozdeliť na 2 časti tak, aby sa z nich dal vytvoriť štvorec (vzniknuté časti môžeš aj preklápať)?

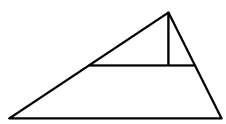


Riešenie:



5. Akým najmenším počtom rezov môžeme rozdeliť všeobecný trojuholník tak, aby zo vzniknutých častí bolo možné poskladať obdĺžnik (vzniknuté časti nemôžeš preklápať)?

Riešenie:



Potrebujeme najmenej 3 rezy.