# Lomihlav

STROM

**Košice 25. 11. 2011**

**Úloha 1**

**Koľko šmolkov súťažilo, ak štvrtina z nich bola v cieli pred Tatkom Šmolkom a dve tretiny za ním?**

*Riešenie*

Označme počet šmolkov ako $x$. Potom tých, ktorí skončili pred Tatkom Šmolkom, bude $\frac{x}{4}$ a tých, ktorí skončili za ním, budú $\frac{2x}{3}$. Celkový počet súťažiacich šmolkov je súčtom šmolkov, ktorí boli v cieli pred Tatkom Šmolkom plus šmolkovia, ktorí boli v cieli za Tatkom Šmolkom plus Tatko Šmolko. Z toho teraz vieme zostaviť rovnicu a vypočítať, koľko šmolkov súťažilo.

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + 1 + \frac{2x}{3} &= x \\ 3x + 12 + 8x &= 12x \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Súťažilo spolu 12 šmolkov.

---

**Úloha 2**

**Gargamelova ohrádka na šmolkov má obdĺžnikový tvar a jej obsah je $36\,\mathrm{m}^2$. Aký veľký obsah bude mať ohrádka, keď sa jej dĺžka aj šírka zväčšia trikrát?**

*Riešenie*

Označme $a$ a $b$ dĺžky strán obdĺžnikovej ohrádky. Jej obsah teda je $S = a \cdot b = 36\,\mathrm{m}^2$. Keď trikrát zväčšíme dĺžku strany $a$ a trikrát zväčšíme dĺžku strany $b$, tak obsah novej ohrádky bude teda

$$3a \cdot 3b = 9 \cdot a \cdot b = 9 \cdot S.$$

Obsah Gargamelovej ohrádky bude

$$9 \cdot 36 = 324\,\mathrm{m}^2.$$

---

**Úloha 3**

**Šmolkocykel prejde danú vzdialenosť za 6 hodín. Koľko hodín potrebuje Gargabus na prejdenie 6-krát väčšej vzdialenosti, ak ide 4-krát rýchlejšie?**

*Riešenie*

Označme $v_s$ rýchlosť Šmolkocykla, $s_s$ vzdialenosť, ktorú prejde Šmolkocykel za nejaký čas a $t_s$ čas, za ktorý prejde Šmolkocykel vzdialenosť $s_s$. Takisto označme $v_g$, $s_g$ a $t_g$ rýchlosť, vzdialenosť a čas pre Gargabus.

Gargabus ide 4-krát rýchlejšie ako Šmolkocykel ($v_g = 4 \cdot v_s$. Gargabus má prejsť 6-krát väčšiu vzdialenosť ako Šmolkocykel ($s_g = 6 \cdot s_s$.

Úlohou je vypočítať hodnotu $t_g$. Úpravou vzorca pre výpočet rýchlosti ($v = \frac{s}{t}$) si vyjadríme čas Gargabusu $\left(t_g = \frac{s_g}{v_g}\right)$. Namiesto hodnôt $s_g$ a $v_g$ dosadíme údaje zo zadania a upravíme

$$\begin{aligned} t_g &= \frac{6s_s}{4v_s} \\ t_g &= \frac{6}{4} \cdot \frac{s_s}{v_s} \\ t_g &= \frac{6}{4} \cdot t_s \\ t_g &= \frac{6}{4} \cdot 6 = 9 \end{aligned}$$

Gargabus prejde 6-krát väčšiu vzdialenosť za 9 hodín.

*Riešenie 2*

Na prejdenie 6-krát väčšej vzdialenosti potrebuje šmolkocykel dokopy 36 hodín. Gargabus sa pohybuje 4-krát rýchlejšie a teda na prejdenie rovnakej vzdialenosti potrebuje iba $36 : 4 = 9$ hodín.

---

**Úloha 4**

**Šmolko Špehúň má kocku, ale nepáči sa mu, že jej povrch, na ktorom môže sliediť, je taký malý. Na koľko dielov tvaru kvádra so štvorcovou podstavou musí Špehúň rozrezať kocku, aby bol súčet povrchov jednotlivých častí rovný dvojnásobku povrchu pôvodnej kocky?**

*Riešenie*

Keď dĺžku hrany kocky označíme $a$, jej povrch sa rovná $6a^2$. (Kocka má 6 stien, každá z nich je tvorená štvorcom so stranou $a$.) Jeho dvojnásobok je teda $12a^2$.

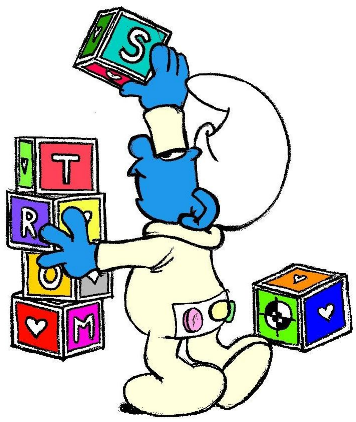
Aby šmolko získal diely v tvare kvádra so štvorcovou podstavou, bude rezať vždy rovnobežne s niektorou stenou kocky. Všimnime si, aký bude súčet povrchov jednotlivých dielov, keď kocku prvýkrát rozreže. Povrch každej z nich predstavuje časť povrchu pôvodnej kocky, a naviac pribudne plocha rezu. Pre lepšiu predstavu povedzme, že pred tým, ako Špehúň začne rezať, celú kocku natrie nejakou farbou (napríklad šmolkomodrou). Po prerezaní kocky mu vzniknú 2 diely. Nezafarbená časť obidvoch z nich predstavuje plochu rezu tvaru štvorca (kedže režeme stále rovnobežne s niektorou stenou kocky, ako bolo povedané vyššie). Jedným takýmto rezom mu pribudne plocha s obsahom $2a^2$.

Stačí si uvedomiť, že táto plocha pribudne k celkovému povrchu kocky každým prerezaním. Aby sa plocha zdvojnásobila, šmolko potrebuje, aby mu pribudla plocha $6a^2$. Keďže každým rezom sa povrch zväčší o $2a^2$ a šmolko chce celkovo zväčšiť povrch o $6a^2$, musíme kocku rozrezať celkovo trikrát a vzniknú mu takto 4 diely.

---

**Úloha 5**

**Tatko Šmolko a Šmoulinka išli Gargabusom do domčeka, ktorý je medzi zastávkami $A$ a $B$. Pomer vzdialeností domčeka od zastávok $A$ a $B$ je $3 : 2$. Tatko Šmolko vystúpil na zastávke $A$, Šmoulinka na zastávke $B$. Šli rovnakou priemernou rýchlosťou a do domčeka dorazili naraz. Koľkokrát bola ich priemerná rýchlosť menšia ako priemerná rýchlosť Gargabusu medzi zastávkami $A$ a $B$?**



*Riešenie*

Vieme, že pomer vzdialeností domčeka od zastávok $A$ a $B$ je $3 : 2$. Celú cestu medzi zastávkami môžeme rozdeliť na 5 rovnakých dielov. Domček je teda od zastávky $A$ vzdialený 3 diely a od zastávky $B$ je vzdialený 2 diely cesty. Keď Tatko Šmolko vystúpi na zastávke $A$, vydá sa pešo do domčeka a Gargabus pokračuje do zastávky $B$. Tu z neho vystúpi Šmoulinka. Vieme, že obaja idú rovnakou priemernou rýchlosťou a domov dorazia naraz. To znamená, že v momente, keď Šmoulinka vystúpi z Gargabusu, musia byť obidvaja od domčeka rovnako ďaleko. Šmoulinka je na zastávke $B$, ktorá je od domčeka vzdialená 2 diely cesty, a Tatko Šmolko má ešte pred sebou 2 diely cesty. Zatiaľ čo Gargabus prešiel celú vzdialenosť $AB$, Tatko Šmolko zo svojich 3 dielov prešiel 1. Celá cesta má 5 dielov, 1 diel predstavuje $\frac{1}{5}$ celej cesty. Za rovnaký čas prešiel Tatko Šmolko 5-krát menšiu vzdialenosť ako Gargabus, a teda sa pohybuje 5-krát pomalšie.

Priemerná rýchlosť šmolkov je teda 5-krát menšia ako priemerná rýchlosť Gargabusu.

---

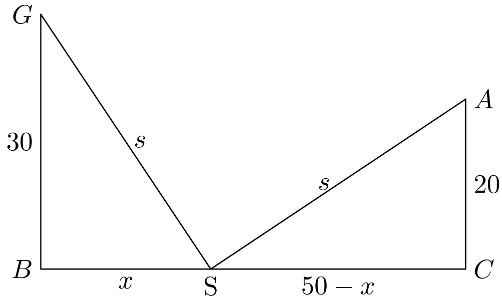
**Úloha 6**

**Na dvoch protiľahlých brehoch rieky sú dva stromy rastúce kolmo vzhľadom na zemský povrch. Výška jedného je 30 metrov a výška druhého 20 metrov, od seba sú vzdialené 50 metrov. Na vrcholku jedného sedí lietajúci Gargamel a na vrcholku druhého operený Azrael. Obaja naraz zbadajú šmolka, ktorý sa vynorí na priamke medzi stromami. Gargamel a Azrael sa vrhnú na šmolka rovnakou rýchlosťou a doletia k nemu súčasne. V akej vzdialenosti od vyššieho stromu sa zjavil šmolko?**

Riešenie

Najviac nám pomôže, keď situáciu z úlohy nakreslíme.

Gargamel aj Azrael sa na šmolka vrhli obaja naraz, tou istou rýchlosťou a v rovnakom momente k nemu aj doleteli. Za daný čas, pri rovnakej rýchlosti teda prekonali rovnakú vzdialenosť. Platí $|GS| = |AS|$, označme túto vzdialenosť ako $s$. Dĺžku, ktorú máme zistiť, označme $x$ a zvyšnú časť vzdialenosti stromov zapíšeme ako 50–$x$. Trojuholníky $GBS$ a $ACS$ sú pravouhlé.




Prepony týchto trojuholníkov sú zhodné, preto

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50–x)^2.$$

Po úprave dostaneme:

$$\begin{array}{rcll} 900 + x^2 & = & 400 + 2500–100x + x^2 & / - x^2 \\ 900 & = & 2900–100x & / + 100x–900 \\ 100x & = & 2000 & / : 100 \\ x & = & 20 & \end{array}$$

Šmolko sa zjavil vo vzdialenosti 20 metrov od vyššieho stromu.

---

## Úloha 7

**Šmolkovia vysádzali stromčeky s bobuľami. Keby ich zasadili tak, aby bolo v každom rade rovnako veľa stromčekov, vysadili by ich 684. Keby ich zasadili tak, že v každom párnom rade by bolo o jeden stromček menej, bolo by ich 675. Počet radov v obidvoch prípadoch je rovnaký. Koľko stromčekov mohlo byť v dlhšom (nepárnom) rade? Uveďte všetky možnosti.**

Riešenie

Máme niekoľko radov po rovnako veľa stromčekov, teda všetkých stromčekov je počet radov krát počet stromčekov v jednom rade a to je 684. Preto počet radov aj počet stromčekov v jednom rade musí byť deliteľom čísla 684 (keďže sa rátajú celé stromčeky).

Ak by sme v párnom rade zasadili o jeden stromček menej, namiesto 684 stromčekov by bolo v sade 675 stromčekov, teda ubudlo 9 stromčekov. Čo znamená, že v sade bolo 9 párnych radov. Keďže deviate párne číslo je 18, tak dokopy tam muselo byť aspoň 18 radov, nie však už 20, pretože vtedy by sme už mali 10 párnych radov. Teda vyhovujú zatiaľ dve možnosti a to, že radov je 18 alebo 19. Ešte overíme, či tieto čísla sú deliteľmi 684, a teda môžu zodpovedať počtu radov tak, aby v rade bol celý počet stromčekov. Zistíme, že $684 : 18 = 38$ a $684 : 19 = 36$.

Našli sme dve riešenia. V dlhšom rade (teda tom pôvodnom) môže byť 36 alebo 38 stromčekov.

---

## Úloha 8

**Stretli sa dvaja Šmolkovia:**
**Š1: Mám 3 šmoliatka, súčin ich rokov je 36. Povedz mi, koľko rokov má každý z nich?**
**Š2: To mi nestačí na určenie rokov, povedz mi ešte niečo.**
**Š1: Tak ti ešte poviem, že súčet ich rokov je ako počet okien na tomto príbytku.**
**Š2: Hmmmm, tak to mi ešte stále nestačí.**
**Š1: Ešte ti poviem, že najstaršie zo šmoliatok je aspoň o rok staršie od ostatných.**
**Š2: Tak to mi už stačí, a ich veky sú. . .**

Riešenie

Všimneme si, že tam vlastne máme tri výroky o veku šmoliatok. Dva výroky o veku šmoliatok na určenie ich veku nestačia (podľa reakcie šmolka vyjde viac ako jedna možná odpoveď), avšak tretia informácia na jednoznačné určenie veku už stačí.

Úlohu budeme riešiť vypisovaním možností a postupným škrtaním nevyhovujúcich, až nakoniec dospejeme k jedinej možnej. Z prvej vety máme, že šmoliatka sú tri a súčin ich vekov je 36. Samozrejme, že to nestačí na to, aby sme zistili, koľko má ktoré rokov, keďže máme viac ako jednu možnosť, ako napísať číslo 36 ako súčin troch čísel. Ani informácia o tom, že „súčet ich rokov je ako počet okien na tomto príbytku“ na určenie veku nepostačuje.

| roky šmoliatok | súčin rokov | súčet rokov |
|---|---|---|
| 1,1,36 | $1 \cdot 1 \cdot 36$ | 38 |
| 1,2,18 | $1 \cdot 2 \cdot 18$ | 21 |
| 1,3,12 | $1 \cdot 3 \cdot 12$ | 16 |
| 1,4,9 | $1 \cdot 4 \cdot 9$ | 14 |
| 1,6,6 | $1 \cdot 6 \cdot 6$ | 13 |
| 2,2,9 | $2 \cdot 2 \cdot 9$ | 13 |
| 2,3,6 | $2 \cdot 3 \cdot 6$ | 11 |
| 3,3,4 | $3 \cdot 3 \cdot 4$ | 10 |

To znamená, že viac ako jedna trojica vekov šmoliatok dáva rovnaký súčet. Rovnaký súčet majú jedine možnosti so súčtom 13, a to $1, 6, 6$ a $2, 2, 9$.

Nakoniec sa pozrime na posledný (tretí) výrok, po ktorom už vieme zistiť, aké veky majú šmoliatka. Hovorí, že „najstaršie je staršie ako ostatné dve šmoliatka o viac ako rok“. Teda možnosť $1 \cdot 6 \cdot 6$ nevyhovuje, lebo najstaršie má rovnako veľa rokov ako druhé najstaršie.

Jediná vyhovujúca možnosť, ktorá vyhovuje je, že šmoliatka majú 2, 2 a 9 rokov.

---

## Úloha 9

**Silák si nevie poradiť s úlohou. Pažroš, Flegmoš a Smieško mu môžu poradiť, no rozhodli sa, že to nebude zadarmo. Pažroš za dobrú radu vyžaduje 15 bobúľ, ale chutia mu len purpurové, Flegmoš je skromnejší, stačí mu 11 bobúľ, zato však len tých najlepších – tmavozelených. Smieško chce 17 bobúľ a jedine indigových. Aký veľký košík (s koľko najmenej bobuľami) musí Silák kúpiť, aby mal istotu, že mu niekto poradí? V každom košíku sú v náhodnom (neznámom) pomere namiešané purpurové, tmavozelené a indigové bobule a každý košík je zavretý, takže Silák nevidí dovnútra.**

*Riešenie*

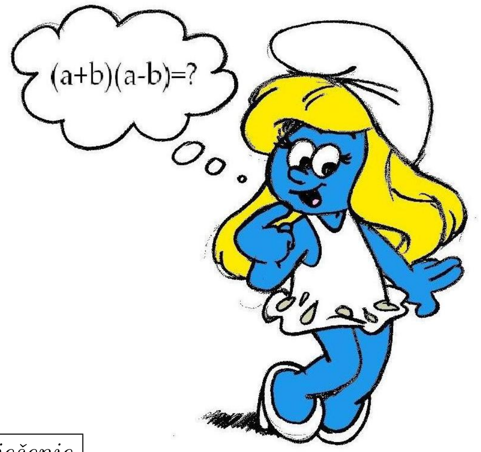
Pri takýchto úlohách je dobré na začiatku si vyskúšať pár možností a spraviť si nejakú predstavu o tom, koľko by to mohlo byť. Po chvíli rozmýšľania prídeme na to, že $14 + 10 + 16 + 1 = 41$ bobúľ stačí. To však nie je všetko, čo od nás táto úloha vyžaduje. Je potrebné ukázať, že 41 stačí a taktiež, že menej nestačí (Na Lomihlave to síce nie je dôležité, keďže dôležitý je len výsledok, ale ukázať to je dobré napríklad aj na to, aby ste si svojim výsledkom boli istí a nestratili zbytočne body za to, že vás výsledok bol zlý. Nezabúdajme, že overenie, že 41 bobúľ stačí je nutná súčasť riešenia.).

Začneme tým, prečo 40 bobúľ nestačí. Stačí nájsť jeden konkrétny príklad namiešania tých farebných bobúľ, kedy nám ani jeden z nich neporadí. Prečo to stačí? Pretože nevieme, v akom pomere sa tam tie bobule nachádzajú, a teda sa môžu aj v tom „našom“ a vtedy nám nikto neporadí. Keby sme tam dali 14 purpurových (Pažroš by nám neporadil), 10 tmavozelených (Flegmoš by nám neporadil) a 16 indigových (Smieško by nám neporadil), čo je dokopy 40 bobúľ takých, kedy nám nikto neporadí. Prvú časť úlohy teda máme za sebou.

V druhej časti nám treba ukázať, že nech sú tie bobule namiešané akokoľvek, tak vždy nám niekto poradí (že tam vynútene musí byť dostatok bobúľ aspoň z jednej farby). Prečo teda 41 stačí? Ak je v košíku 15 purpurových, tak to máme. Ale čo ak nie? Predpokladajme teraz, že purpurových je tam najviac 14. V košíku ďalej máme ešte aspoň $41 - 14 = 27$ tmavozelených a indigových bobúľ. A pokračujeme opäť, ak tam je 11 tmavozelených, tak sme vyhrali, tak teda nech ich tam je najviac 10, potom však v košíku ostane ešte aspoň $27 - 10 = 17$ bobúľ a vieme, že sú už len indigové, teda to stačí na to, aby sme si boli istí, že ak nám ani Pažroš ani Flegmoš neporadil (ak áno, tak to máme), tak nám poradí Smieško.

Takže sme dokázali, že je potrebných aspoň 41 bobúľ a že to aj naozaj stačí, aby nám niektorý zo šmolkov poradil.

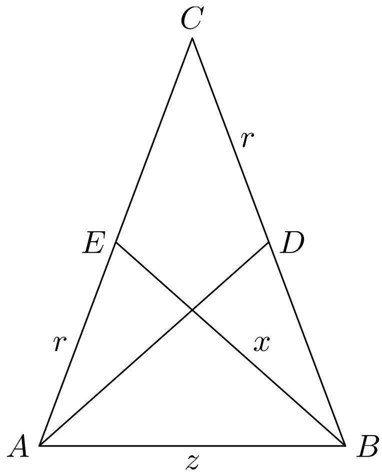
## Úloha 10




**Šmolko Farmár našiel trojuholníky v obilí. Rovnoramenný trojuholník $ABC$ so základňou $AB$ má obvod $50\,\mathrm{cm}$. Označme $D$ stred strany $BC$ a $E$ stred strany $CA$. Obvod trojuholníka $ABE$ je o $8\,\mathrm{cm}$ väčší ako obvod trojuholníka $ACD$. Vypočítajte veľkosť základne trojuholníka $ABC$.**

*Riešenie*

Trojuholník $ACD$ je zhodný s trojuholníkom $BCE$ (podľa vety $sus$). Pozrime sa, z akých strán sa skladajú jednotlivé trojuholníky.




Polovicu ramena (strany $AC$ a $BC$) si označíme $r$, úsečku $BE$ si označíme $x$ a základňu $z$. Teraz vieme, že obvod trojuholníka $ABE$ je $r+x+z$, obvod trojuholníka $BCE$ je $3r+x$ a obvod trojuholníka $ABC$ je $4r+z$, čo je $50\,\mathrm{cm}$. Z týchto informácií a informácie, že obvod trojuholníka $ABE$ je o $8\,\mathrm{cm}$ väčší ako obvod trojuholníka $BCE$, dostávame

$$\begin{aligned} r+x+z &= 3r+x+8 \\ 4r+z &= 50. \end{aligned}$$

Po jednoduchej úprave nám z prvej rovnice vypadne $x$ a vyjadríme si z nej $z$, ktoré dosadíme do druhej rovnice:

$$\begin{aligned} z &= 2r+8 \\ 4r+2r+8 &= 50. \end{aligned}$$

Úpravou dostávame, že $r = 7\,\mathrm{cm}$ a základňa ma dĺžku $z = 2\cdot 7+8 = 22\,\mathrm{cm}$.

## Úloha 11

**Šmolko Kutil má trojuholníkové kolesá. Určte dĺžku strany $a$ kolesa $ABC$, ak $a$ je o $4\,\mathrm{cm}$ dlhšia ako $b$ a $v_a = 6\,\mathrm{cm}$, $v_b = 9\,\mathrm{cm}$.**

*Riešenie*

Obsah trojuholníka vieme vypočítať dvoma spôsobmi: $S_{ABC} = \frac{a\cdot v_a}{2}$ a $S_{ABC} = \frac{b\cdot v_b}{2}$, ale stále je to obsah rovnakého trojuholníka, takže tieto obsahy sa musia rovnať.

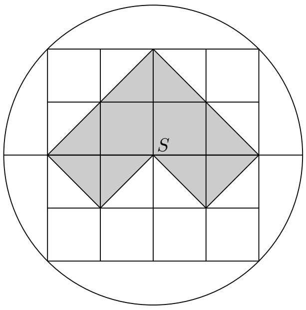
$$\begin{aligned} \tfrac{a\cdot v_a}{2} &= \tfrac{b\cdot v_b}{2} \\ \tfrac{a\cdot 6}{2} &= \tfrac{a-4\cdot 9}{2} \\ \tfrac{6a}{2} &= \tfrac{9a-36}{2} \\ 6a &= 9a-36 \\ 36 &= 3a \\ a &= 12 \end{aligned}$$

Dĺžka strany trojuholníkového kolesa je 12 cm.

**Úloha 12**

**Na obrázku, ktorý nakreslila Šmoulinka, je útvar s tmavou plochou v štvorčekovej sieti. Ak je priemer kružnice 30 centimetrov, vypočítajte obsah a obvod tmavej časti. Aký je súčet týchto dvoch čísel?**

*Riešenie*




Uhlopriečka veľkého štvorca (na obrázku) sú štyri uhlopriečky malých štvorčekov a má dĺžku priemeru kružnice. Z toho vieme jednoducho zistiť, že malá uhlopriečka má dĺžku $30 : 4 = 7{,}5\,\text{cm}$. Obvod tmavého útvaru tvoria samé takéto krátke uhlopriečky a ľahko spočítame, že ich je osem, a preto je obvod 60 cm. Šmoulinkin útvar vieme rozdeliť na tri štvorce, ktorých stranu tvoria malé uhlopriečky. Obsah jedného je $7{,}5 \cdot 7{,}5 = 56{,}25\,\text{cm}^2$. Keď to vynásobíme tromi, dostaneme obsah tmavého útvaru, ktorý je $168{,}25\,\text{cm}^2$.

Súčet hodnôt obsahu a obvodu tmavej plochy je

$$60 + 168{,}75 = 228{,}75.$$

**Úloha 13**

**Trojciferné čísla, ktoré majú túto vlastnosť: napísané dvakrát za sebou nám po postupnom delení číslami 7, 11 a 13 bezo zvyšku dajú pôvodné trojciferné číslo, nazveme pošmolkované. Koľko trojciferných čísel je pošmolkovaných?**
***(Napríklad, keď si vyberieme číslo 184, tak si napíšeme číslo 184184. Teraz toto číslo vydelíme 7 (184184/7 = 26312). Výsledok vydelíme 11 (26312/11 = 2392). A nakoniec vydelíme 13 (2392/13 = 184). Číslo 184 je pošmolkované.)***

*Riešenie*

Označme si nejaké trojciferné číslo $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, kde $a, b, c$ sú cifry tohto čísla. Čiže $a$ označuje počet stoviek, $b$ počet desiatok a $c$ jednotiek. Ak si ho napíšeme dvakrát za sebou, dostaneme $\overline{abcabc}$ potom máme

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c = \\ &= 1001 \cdot (100a + 10b + c) = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}.\end{aligned}$$

Teda číslo $\overline{abcabc}$ bude vždy možné vydeliť postupne číslami $7, 11, 13$ bezo zvyšku a po delení vždy dostaneme pôvodné číslo $\overline{abc}$. Preto sú pošmolkované všetky trojciferné čísla a ich počet je 900.

**Úloha 14**

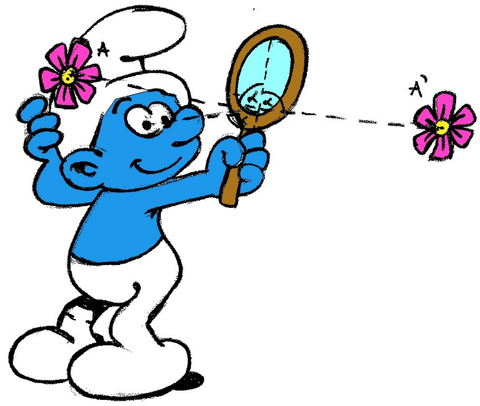
**Gargamel má drevenú kocku s hranou, ktorej dĺžka v centimetroch je celé číslo. Celú kocku natrie šmolkomodrou farbou a potom ju celú rozpíli na malé kocky, s hranou 1 cm. Niekoľko týchto malých kociek zostalo nezafarbených (označme ich počet $X$), niekoľko malých kociek má šmolkomodrou farbou pomaľovanú jednu stenu (označme ich počet $Y$) a okrem toho tam sú ešte ostatné malé kocky, ktoré majú pomaľované 2 alebo 3 steny. Akú dĺžku v centimetroch mala hrana pôvodnej kocky, ak $X$ je dvojnásobkom $Y$?**

*Riešenie*

Označme si $h$ dĺžku hrany Gargamelovej kocky (v centimetroch). Teraz vyjadríme $X$ a $Y$ v závislosti od $h$.

Číslo $X$ vyjadruje počet malých kociek, ktoré sú celé „vo vnútri“ kocky. Ľahko si všimneme, že pre $h = 1$ a $h = 2$ je ich počet 0, keďže podľa zadania ich niekoľko zostalo nezafarbených, tak $h < 2$ už nemusíme uvažovať. Pre $h > 2$ dostaneme nezafarbené malé kocky tak, že zahodíme z pôvodnej len vonkajšiu vrstvu. Takže nezafarbené malé kocky budú vo vnútri pôvodnej kocky tvoriť menšiu kocku s hranou $h - 2$ a teda $X = (h - 2)^3$ (počet malých kociek v tejto vnútornej kocke).

Ďalej vyjadríme $Y$. Pre $h > 2$ budú ich zafarbené steny na každej stene pôvodnej kocky tvoriť štvorec (ten bude mať stranu o 2 menšiu ako $h$ lebo krajné malé kocky na každej stene tej pôvodnej kocky majú zafarbené 2 alebo 3 steny). Takže pre $h > 2$ bude šesťkrát (lebo sú na všetkých šiestich stenách kocky) počet malých kociek, ktoré tvoria tento štvorec $Y = 6 \cdot (h-2)^2$ (je zrejmé, že žiadnu sme nezarátali viackrát, lebo ak by bola jedna malá kocka na viacerých stenách, tak by mala zafarbených stien viac ako 1).



Našou úlohou je však zistiť, pre ktoré $h$, bude $X = 2Y$. Pre $h > 2$ dosadíme za $X$ a $Y$ to, na čo sme prišli a dostávame

$$(h-2)^3 = 12 \cdot (h-2)^2.$$

Rovnosť predelíme $(h-2)^2$ (to môžeme, lebo $h > 2$) a dopočítame $h$. Dĺžka hrany pôvodnej kocky je 14 cm.

---

**Úloha 15**

**Štvorciferný PIN kód $\overline{ABCD}$ na peňaženke Tatka Šmolka je zaujímavý:**
- **jednotlivé číslice sú prvočíslami,**
- **$\overline{AB}$ je prvočíslo,**
- **$\overline{BC}$ je prvočíslo,**
- **$\overline{CD}$ je prvočíslo.**

**Tatko Šmolko zabudol svoj PIN kód, ale pamätá si všetky uvedené vlastnosti a snaží sa zaktivovať zamknutú peňaženku. Koľko najviac čísel musí vyskúšať?**

*Riešenie*

Jednotlivé číslice sú prvočíslami, takže to môžu byť $2, 3, 5, 7$. Dvojciferné prvočíslo nemôže končiť na 2 ani 5, lebo by bolo deliteľné dvomi resp. piatimi. Preto kvôli druhej, tretej a štvrtej podmienke nemôže byť druhá, tretia ani štvrtá číslica 2 ani 5 - inak by spolu s predošlou cifrou netvorili prvočíslo.

Ďalej si môžeme všimnúť, že dve po sebe idúce číslice nemôžu byť rovnaké, lebo inak by nimi tvorené číslo bolo deliteľné 11, teda bolo by násobkom 11 a teda by nebolo prvočíslo. Potom posledné trojčíslie PIN kódu môže vyzerať len 373 alebo 737 (obidve sedia, lebo 73 aj 37 sú prvočísla).

Teraz nám zostáva už len overiť druhú podmienku zo zadania pre čísla 2373, 2737, 3737, 5373, 5737 a 7373 (ostatné čísla sme už vylúčili, lebo posledné trojčíslie je 373 alebo 737, prvá číslica je jedna z cifier $2, 3, 5, 7$, ktorá nesmie byť rovnaká s nasledujúcou.) Keďže 2737 ani 5737 nespĺňajú druhú podmienku (27 ani 57 nie je prvočíslo), Tatko Šmolko ich nemusí skúšať.

Zvyšné čísla 2373, 3737, 5373, 7373 sú jediné vyhovujúce všetkým podmienkam, a teda ich Tatko Šmolko musí vyskúšať prinajhoršom všetky. Musí teda vyskúšať najviac 4 možnosti.

---

**Úloha 16**

**Šmolko Neposeda začal náhle rásť. Prvý deň vyrástol o polovicu svojej výšky. Druhý deň sa zväčšil o tretinu výšky, ktorú dosiahol na konci prvého dňa. Tretí deň zväčšil svoju výšku, ktorú dosiahol druhý deň o štvrtinu. Štvrtý deň sa zväčšil o pätinu výšky, ktorú dosiahol na konci tretieho dňa. Takto to pokračovalo ďalej. Koľko dní trvalo, kým dorástol do stonásobku svojej pôvodnej výšky?**

*Riešenie*

Označme $v(n)$ výšku Šmolka Neposeda na konci $n$-tého dňa (dni budeme číslovať ako v zadaní, teda odkedy začal náhle rásť), pričom $v(0)$ bola jeho pôvodná výška. Vyjadríme postupne výšky v jednotlivé dni až po výšku na konci $n$-tého dňa. Vo všeobecnosti v $k$-ty deň sa jeho výška zvýši o $\frac{1}{k+1}$ výšky z predchádzajúceho dňa, teda jeho výška bude $v(k-1) + v(k-1) \cdot \frac{1}{k+1}$ a to je $v(k-1) \cdot \frac{k+2}{k+1}$ (napríklad v tretí deň je jeho výška $v(2) + v(2) \cdot \frac{1}{4} = v(2) \cdot \frac{5}{4}$).

$$\begin{aligned}
v(1) &= v(0) + v(0) \cdot \tfrac{1}{2} = v(0) \cdot \tfrac{3}{2} \\
v(2) &= v(1) + v(1) \cdot \tfrac{1}{3} = v(1) \cdot \tfrac{4}{3} = v(0) \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \\
v(3) &= v(2) + v(2) \cdot \tfrac{1}{4} = v(2) \cdot \tfrac{5}{4} = v(0) \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{5}{4} \\
&\vdots \\
v(n) &= v(n-1) + v(n-1) \cdot \tfrac{1}{n+1} = v(n-1) \cdot \tfrac{n+2}{n+1} = v(0) \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \dots \cdot \tfrac{n+1}{n} \cdot \tfrac{n+2}{n+1} = v(0) \cdot \tfrac{n+2}{2}
\end{aligned}$$

Poslednú rovnosť dostaneme tak, že vykrátime vždy čitateľ zlomku s menovateľom nasledujúceho a tak sa nám zvýši len čitateľ posledného a menovateľ prvého zlomku. Teda na konci $n$-tého dňa bude jeho výška $\frac{n+2}{2}$-krát väčšia.

Potrebujeme zistiť, kedy dorastie do stonásobku svojej pôvodnej výšky, čiže kedy $v(n) = 100 \cdot v(0)$. Teda kedy platí

$$v(0) \cdot \frac{n+2}{2} = v(0) \cdot 100.$$

Po vydelení $v(0)$ (výška je vždy kladné číslo, lebo Šmolko musel mať nejakú výšku), dostávame $n = 198$.

Do stonásobku svojej výšky dorastie za 198 dní.

---

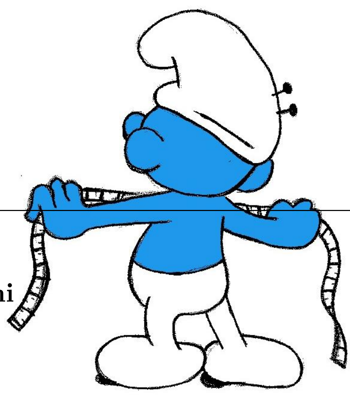
## Úloha 17

**Na zadnom kolese šmolkotorky sa nová pneumatika opotrebuje po 15 kilometroch. Na prednom kolese sa nová pneumatika opotrebuje po 30 kilometroch. Po koľkých kilometroch treba pneumatiky vymeniť (pneumatiku z predného kolesa na zadné a naopak), aby sa pneumatiky opotrebovali naraz? Poznámka: Na začiatku sú obe pneumatiky nové a neopotrebované.**

*Riešenie*

Na úlohu sa dá pozerať aj trochu ináč. Môžeme si predstaviť, že pneumatika má nejakú hrúbku. Napríklad nech má 30 mm. Potom podmienka, že pneumatika vydrží na prednom kolese 30 kilometrov nám hovorí to, že každý kilometer sa zošúcha 1 mm pneumatiky. Teda po 30 kilometroch sa zošúcha celá pneumatika. Na rozdiel od predného kolesa, na zadnom sa zošúchava pneumatika rýchlejšie. Za jeden kilometer sa zošúchajú 2 mm pneumatiky. Teda za jeden kilometer sa spolu na prednom a zadnom kolese zošúchajú 3 mm pneumatiky. Obe pneumatiky majú na začiatku po 30 mm, teda spolu 60 mm. Spolu sa opotrebujú po 20 kilometroch pretože sa opotrebuvávajú 3 mm za kilometer a chceme, aby sa na konci opotrebovali naraz. Už nám len stačí zistiť, kedy máme pneumatiky vymeniť. Logicky chceme, aby obe pneumatiky boli rovnako dlho na zadnom kolese, pretože nechceme, aby sa jedna z pneumatík opotrebovala viac ako druhá. Navyše pneumatika, ktorá by bola dlhšie na zadnom kolese, by sa opotrebovala viac.

Pneumatiky treba vymeniť presne v polovici vzdialenosti, ktorú vieme prejsť, než sa pneumatiky opotrebujú. Treba ich vymeniť po 10 kilometroch.



---

## Úloha 18

**Šmolko Špekulant videl napísané štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ s rôznymi ciframi. Šmolko si toto číslo zapísal tak, že namiesto cifry $a$ si napísal aritmetický priemer zvyšných cifier, teda cifier $b$, $c$ a $d$. Namiesto cifry $b$ napísal opäť aritmetický priemer zvyšných cifier. A takto pokračoval aj s ciframi $c$ a $d$, teda každú nahradil aritmetickým priemerom zvyšných troch cifier. Napodiv stále tento priemer bol celé číslo. Aké najmenšie číslo takto mohol šmolko Špekulant dostať?**

*Riešenie*

Aritmetický priemer ľubovoľnej trojice musí byť podľa zadania celé číslo. Na základe toho súčty $b + c + d$ a $a + c + d$, musia byť deliteľné číslom 3. Preto cifra $a$ a cifra $b$ musí dávať rovnaký zvyšok po delení číslom

3. Rovnakú úvahu vieme použiť na cifry $a$ a $c$ respektíve na cifry $a$ a $d$. Preto vieme, že všetky 4 cifry musia dávať rovnaký zvyšok po delení číslom 3. Pozrime sa preto, aké zvyšky dávajú cifry po delení troma. Cifry 0, 3, 6, 9 dávajú zvyšok 0, cifry 1, 4, 7 dávajú zvyšok 1 a cifry 2, 5, 8 dávajú zvyšok 2. Keďže naše číslo bolo štvorciferné s rôznymi ciframi, tak tie cifry museli byť 0, 3, 6 a 9. Na to, aby si šmolko na prvé miesto napísal najmenšiu možnú cifru, tak cifra $a$ musela byť najväčšia možná, aby zvyšné 3 cifry mohli byť najmenšie možné. Preto číslo, ktoré videl, by malo byť 9630.

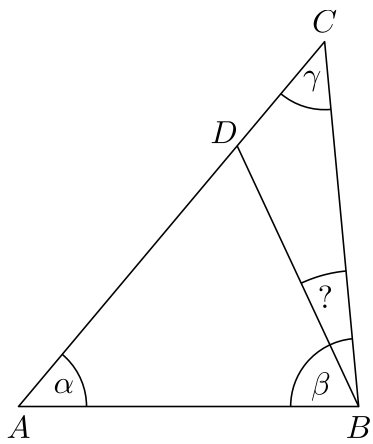
Najmenšie číslo, ktoré si mohol šmolko špekulant zapísať, je 3456.

---

## Úloha 19

**Šmolko Leňoch si kupuje cez internet trojuholníkovú posteľ. Daný je trojuholník $ABC$ (s uhlom $\alpha$ pri vrchole $A$, s uhlom $\beta$ pri vrchole $B$ a s uhlom $\gamma$ pri vrchole $C$) taký, že $|AC| > |AB|$ a $\beta - \gamma = 30°$. Na jeho strane $AC$ označme bod $D$ tak, aby platilo $|AB| = |AD|$. Zistite veľkosť uhla $CBD$, aby Leňoch vedel, či sa zmestí na svoju novú posteľ.**

*Riešenie*




Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Preto vieme, že $\alpha = 180° - \beta - \gamma$. Trojuholník $ABD$ je zo zadania rovnoramenný s uhlom $\alpha$ pri vrchole $A$, a preto pri vrcholoch $B$ a $D$ bude mať rovnaké uhly. To znamená, že $\alpha = 180° - 2|\sphericalangle ABD|$. Máme dve vyjadrenia uhla $\alpha$ a tak ich dáme do rovnosti a upravíme

$$\begin{aligned} 180° - \beta - \gamma &= 180° - 2|\sphericalangle ABD| \\ \beta + \gamma &= 2|\sphericalangle ABD| \\ |\sphericalangle ABD| &= \tfrac{\beta+\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Posledná vec, ktorá nám ostala, je dopočítať veľkosť uhla $CBD$

$$|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABD| = \beta - (\gamma + \beta)/2 = (\beta - \gamma)/2 = 15°.$$

Veľkosť uhla $CBD$ je 15°.

---

## Úloha 20

**Šmolko Básnik si položil rečnícku otázku: Aký je počet všetkých dvojciferných čísel, ktorých druhá mocnina končí dvojčíslom 44?**

*Riešenie*

Zapíšme dvojciferné číslo $n$ ako $10a + b$, kde $a, b$ sú cifry. Potom

$$n^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

Prvé dva členy sú deliteľné 10, preto posledná cifra bude rovnaká ako posledná cifra $b^2$ (odskúšaním cifier zistíme, že vyhovuje len $b \in \{2, 8\}$).

Ostáva overiť koľko z čísel 12, 18, 22, 28, 32, 38, 42, 48, 52, 58, 62, 68, 72, 78, 82, 88, 92, 98 má druhú mocninu končiacu na dvojčíslo 44. Keď vyskúšame všetky možnosti, zistíme, že vyhovujú len nasledujúce 4 dvojciferné čísla 12, 62, 38 a 88.

Existujú 4 dvojciferné čísla, ktorých druhé mocniny končia na dvojčíslie 44.

**Hlavolam 1**

**Tatko Šmolko mal na povale veľa neuprataných krabíc. Mal 11 veľkých, niekoľko stredných a niekoľko malých krabíc. Položil na stôl 11 veľkých krabíc. Niektoré nechal prázdne a do ostatných dal po 8 stredných krabíc. Niektoré stredné krabice nechal prázdne a do ostatných dal po 8 malých prázdnych krabíc. Na stole bolo napokon 102 úplne prázdnych krabíc. Koľko krabíc mal Tatko Šmolko celkovo?**

*Riešenie*

Položením ôsmich prázdnych krabíc do jednej väčšej prázdnej sa celkový počet prázdnych krabíc zvýši o $8-1=7$. Je to preto, že pribudlo 8 menších prázdnych krabíc, ale jedna, do ktorej sme ich dali, sa zmenila na plnú. Nám zostalo prázdnych krabíc 102, takže sme pridávali krabice $102/7=13$-krát. Neprázdnych krabíc je teda 13 a prázdnych 102, takže dokopy 115.

**Hlavolam 2**

**Tatko Šmolko sa pred Gargamelom skryl za strom, na ktorom boli listy s číslami 16, 18, 24, 48, 66, 72, 96. Pod stromom boli už opadnuté listy s číslami 9, 22, 34, 42, 61, 81. Ktoré dva listy musia ešte opadnúť, lebo sa k ostatným na strome pre nejakú vlastnosť nehodia?**
***Vlastnosť, pre ktorú majú tie dva listy opadnúť, je rovnaká ako tá, pre akú opadli listy, ktoré už sú pod stromom.***

*Riešenie*

Ako prvé si určite všimneme, že všetky čísla na strome sú párne. To nám teda nepomôže, tak skúšame nájsť inú vlastnosť, ktorej vyhovujú všetky okrem dvoch čísel. Deliteľnosť sa pri úlohách takéhoto typu vždy oplatí preskúmať. Skúsme deliteľnosť tromi. Všetky čísla okrem 16 sú deliteľné tromi. Ani toto kritérium nevyhovuje, keďže iba jedno číslo nepatrí na strom. Poďme na deliteľnosť štyrmi. Čísla 18 a 66 nie sú deliteľné štyrmi a keďže sú dve, ktoré do skupiny nepatria, tak sme našli to správne kritérium (a keď sa pozrieme na všetky čísla, ktoré ležia pod stromom, všimneme si, že žiadne z nich nie je deliteľné štyrmi).

**Hlavolam 3**

**Na rodinnej šmolkooslave sa zišli nasledujúci šmolkopríbuzní: jeden starý otec, jedna stará mama, dvaja otcovia, dve mamy, štyri deti, tri vnúčatá, jeden brat, dve sestry, dvaja synovia, dve dcéry, jeden svokor, jedna svokra, jedna nevesta. Ale nebolo tam tak veľa ľudí, ako to znie, pretože jedna osoba môže byť napríklad aj mamou, aj dcérou. Koľko najmenej ľudí tam v skutočnosti mohlo byť?**

*Riešenie*

Na oslave nie je nijaký prarodič ani pravnúča, teda tam budú zrejme iba tri generácie. Starý otec, stará mama a tri vnúčatá určite nebudú tá istá osoba. Tri vnúčatá by mohli byť súrodenci, a keďže na oslave bol jeden brat a dve sestry, budú to dve dievčatá a jeden chlapec. Ešte nemáme žiadneho svokra, svokru ani syna a dcéru, tak skúsime pridať rodičov troch detí. Ich mama bude zrejme nevesta starých rodičov a otec troch detí synom starých rodičov. Takto už máme správne počty všetkých príbuzných. Boli tam teda starí rodičia, ich syn, jeho manželka a ich tri deti – dve dievčatá a jeden chlapec. Spolu sedem ľudí.

**Hlavolam 4**

**Gargamel má chuť na čerstvých šmolkov a tak sa vybral do dediny, kde boli 3 dostupné huby. V každej hube je buď jeden šmolko, alebo alarm, ktorý zobudí zvyšok dediny a Gargamel sa nenaje. Navyše platí, že šmolko je v aspoň jednej z húb (môže byť aj vo viacerých). Dva z nápisov na hubách sú pravdivé a jeden nepravdivý, nevie sa však, ktoré sú ktoré. Na prvej hube je**

**napísané: Šmolko je v druhej alebo v tretej hube. Na druhej hube je napísané: Nápis na hube, v ktorej je šmolko, je pravdivý. Na tretej hube je napísané: Šmolko je v prvej hube. Zistite, v ktorej z húb sa určite nachádza šmolko.**

*Riešenie*

Vieme, že práve jeden z výrokov je nepravdivý, a ostatné dva sú pravdivé, tak teda rozoberieme tri možnosti a to, keď je nepravdivý prvý, druhý alebo tretí výrok.

- Prvý výrok je nepravdivý. Potom šmolko nie je v druhej ani tretej hube, teda je v prvej. Z toho vyplýva, že šmolko môže byť len v prvej hube. Výrok na druhej hube musí byť pravdivý, čo znamená, že tam, kde je šmolko, je pravdivý výrok, čiže na prvej hube je pravdivý výrok, čo ale neplatí.
- Druhý výrok je nepravdivý. Na prvej je pravdivý, teda šmolko je v druhej alebo tretej hube. Na tretej je tiež pravdivý, čiže šmolko je v prvej hube. To už ale nesedí, lebo pre žiadnu z húb nie sú pravdivé oba výroky.
- Tretí výrok je nepravdivý. To znamená, že šmolko nie je v prvej hube (je teda v druhej alebo tretej). Prvý výrok má byť pravdivý, a teda aj je, keďže už z tretieho výroku máme, že šmolko sa nachádza v druhej alebo tretej hube. Druhý výrok je pravdivý, teda šmolko je tam, kde je pravdivý výrok, čiže v prvej alebo druhej, má však zároveň (podľa tretieho a prvého výroku) byť v druhej alebo tretej hube, teda sa nachádza v druhej a tak pravdivosti všetkých troch výrokov vyhovujú.

Šmolko sa nachádza v druhej hube.

---

**Hlavolam 5**

**Tatko Šmolko raz zo sna povedal: Číslice zapísané za sebou sa sčítajú, čísla v zátvorke majú opačnú hodnotu. Určte hodnotu výrazu**

$$1,(1,(1)),(1,(1),1),(1,1,(1,(1,1))),((1),(1,(1),1,1)).$$

***Príklady:*** $1,1=2$***;*** $(1,1,1)=-3$ ***a*** $1,1,(1)=1$**.**

*Riešenie*

Stačilo postupovať ako pri vyčísľovaní všetkých výrazov, teda od najvnútornejších zátvoriek a nepomýliť sa pritom. Rozdeľme jednotlivé „väčšie“ zátvorky na menšie časti

$$1,\underbrace{(1,(1))}_{A},\underbrace{(1,(1),1)}_{B},\underbrace{(1,1,(1,(1,1)))}_{C},\underbrace{((1),(1,(1),1,1))}_{D}$$

a určme ich hodnoty

$$\begin{aligned}
A &= (1,(1)) = (1,-1) = 0\\
B &= (1,(1),1) = (1,-1,1) = (1) = -1\\
C &= (1,1,(1,(1,1))) = (1,1,(1,(2))) = (1,1,(1,-2)) = (1,1,(-1)) = (1,1,1) = (3) = -3\\
D &= ((1),(1,(1),1,1)) = (-1,(1,-1,1,1)) = (-1,(2)) = (-1,-2) = (-3) = 3.
\end{aligned}$$

A teda

$$1,(1,(1)),(1,(1),1),(1,1,(1,(1,1))),((1),(1,(1),1,1)) = 1,A,B,C,D = 1,0,-1,-3,3 = 0.$$

---

**Hádanka 1**

**Keď sa rozdvojíme, nič my nespravíme, a keď sa spojíme, všetko rozdvojíme.**

(Nožnice)

**Hádanka 2**

**Má ihlu, nemá niť, vie spievať, nevie šiť.**

(Gramofón)

**Hádanka 3**

**Ktorá misa, aj keď je stará, je celá nová?**

(Porcelánová misa)

**Hádanka 4**

**Má to zem bez ľudí, rieky bez vody, mestá bez domov a hory bez stromov.**

(Mapa)

**Hádanka 5**

**Keď prichádzame alebo odchádzame, vždy jej ruku podávame.**

(Kľučka)

Vydanie publikácie podporili:

**Agentúra na podporu výskumu a vývoja**
ako projekt
LPP-0057-09 *Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží*

| | |
|---|---|
| autori: | Jana Baranová, Róbert Hajduk, Martina Jesenská, Tomáš Kocák, Katarína Krajčiová, Dáša Krasnayová, Radka Masloviaková, Matúš Stehlík, Monika Vaľková |
| názov: | **Lomihlav – 25.11.2011** |
| vydavatelia: | Ústav matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach<br>Združenie STROM |
| adresa: | Jesenná 5, 041 54 Košice |
| www: | http://matik.strom.sk |
| rok vydania: | 2011 |
| rozsah: | 16 strán |
| verzia: | 23. februára 2012 |