LOMIHLAV

Košice 30. 11. 2012

Úloha 1

Cypher sa rozhodol ostať v Matrixe, aby sa mohol stať farmárom a chovať hydinu. Na dvore mal na začiatok iba sliepky a kravy. Dohromady mali 8 hláv a 22 nôh. Koľko sliepok bolo na dvore?

Riešenie

Ak neuvažujeme anomálie v ríši zvierat, tak sliepka má jednu hlavu a dve nohy a krava má jednu hlavu a štyri nohy. Z toho vyplýva, že na dvore bolo 8 zvierat. Ak by na dvore boli iba sliepky, mali by spolu $2 \cdot 8 =$16 nôh. Na dvore je ale 22 nôh, čiže tam musia byť aj nejaké kravy. Ak jednu sliepku vymeníme za kravu, počet nôh na dvore stúpne o 2 a počet hláv sa nezmení. My máme na dvore o 6 nôh viac, ako keby tam boli len sliepky. Potrebujeme vymeniť tri sliepky za kravy, aby na dvore bolo 22 nôh. Na dvore budú 3 kravy a 5 sliepok.

Riešenie 2

Označme s počet sliepok a k počet kráv na dvore. Sliepka má 1 hlavu a 2 nohy a krava 1 hlavu a 4 nohy. Údaje zo zadania si vieme zapísať pomocou sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned} s + k &= 8 \\ 2s + 4k &= 22. \end{aligned}$$

Ostáva sústavu vyriešiť. Odčítaním dvojnásobku prvej rovnice od druhej rovnice dostávame

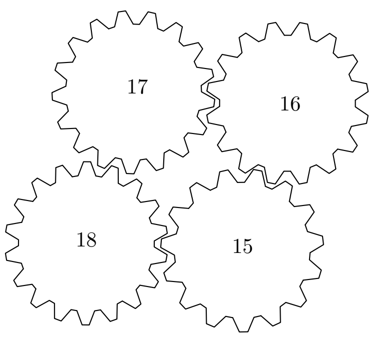
$$2k = 6.$$

Na dvore sú teda 3 kravy. Dosadením tohto výsledku do prvej rovnice dostávame, že na dvore je 5 sliepok.

Úloha 2

Ľudia musia zabrániť tomu, aby roboti získali prístupové kódy do Zionu, posledného ľudského mesta. Na to musia mať presné informácie o robotickej anatómii. V robotovi sú vedľa seba štyri ozubené kolesá, ktoré zapadajú do seba a majú 18, 17, 16 a 15 zubov. Koľkokrát sa otočí najmenšie koleso v robotovi, kým sa kolesá prvýkrát dostanu do rovnakej pozície ako na úplnom začiatku ich chodu?

Riešenie



Najprv je potrebné si predstaviť, ako to vyzerá, keď sú ozubené kolesá zapojené do seba. Znamená to, že za nejakú časovú jednotku sa každé koleso otočí o rovnaký počet zubov. Ak napríklad máme 20-zubové koleso zapojené do 10-zubového, a za minútu sa 20-zubové otočí celé, čiže o 20 zubov, tak aj menšie, do neho zapojené, sa otočí o 20 zubov, teda celkovo 2 krát.

Naše prvé koleso má 18 zubov, takže bude v rovnakej pozícii keď prejde 18, 36, 54, 72,... zubov. Druhé má 17 zubov, takže rovnako otočené ako na začiatku bude o 17, 34, 51,... zubov. Tretie o 16, 32, 48, ... a štvrté o 15, 30, 45,... Musíme nájsť taký počet zubov, ktorý je násobkom počtu zubov prvého, druhého aj tretieho aj štvrtého kolesa a je čo najmenšie. Hľadáme teda najmenší spoločný násobok čísel 18, 17, 16 a 15. Začneme dvojicou 18 a 17 a postupne pridáme 16 a 15.

Čísla 18 a 17 nemajú spoločného deliteľa a preto ich najmenším spoločným násobkom bude $18 \cdot 17 = 306$. Čísla 306 a 16 majú spoločného deliteľa číslo 2 a preto ich najmenším spoločným násobkom bude $\frac{306 \cdot 16}{2} = 2448$. Predelili sme 2, aby sme mali najmenší spoločný násobok. Čísla 2448 a 15 majú spoločného deliteľa číslo 3 a preto ich najmenším spoločným násobkom bude $\frac{2448 \cdot 15}{3} = 12240$. Predelili sme 3, aby sme mali najmenší spoločný násobok.

Kolesá teda budú v rovnakej pozícii po tom, čo prejde 12240 zubov a to je po

$$\frac{12240}{15} = 816$$

otočení najmenšieho kolesa.

Úloha 3

Morpheus volal Trinity, že sa stala chyba v Matrixe, všade vidno iba 3 čísla, 240, 60 a 80. Morpheus nemal kredit a preto jej povedal iba toľko, že zistil, že 240 je súčin troch celých čísel, ktoré potrebuje naťukať na klávesnici. Ďalej zistil, že 60 je súčin prvých dvoch celých čísel, ktoré potrebuje a súčin druhého a tretieho celého čísla, ktoré potrebuje je 80. Aby Morpheovi Trinity pomohla, potrebuje zistiť iba jednu vec: Aké je najmenšie z týchto troch čísel?

Riešenie

Označme prvé číslo a, druhé b a napokon tretie c. Zo zadania platí

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c &= 240 \\ a \cdot b &= 60. \end{aligned}$$

Dosadíme 60 za $a \cdot b$ do prvej rovnice ($60 \cdot c = 240$), z čoho dostávame $c = 4$. Dosadením c do súčinu $b \cdot c = 80$, dostávame $b = 20$. Z rovnice $a \cdot b = 60$ dopočítame $a = 3$. Najmenšie číslo je $a = 3$.

Úloha 4

Na Nea letelo niekoľko (viac ako jedna) guliek očíslovaných prirodzenými číslami. Zastavil ich a preto mal čas zistiť, že čísla sú za sebou idúce a ich súčet je 30. Koľko guliek mohlo letieť na Nea? Napíšte počet všetkých možností.

Riešenie

Súčet prvých 8 po sebe idúcich čísel (1+2+3+4+5+6+7+8) je 36, takže guliek mohlo byť od 2 do 7. Guľky majú čísla po sebe idúce, takže ak vydelíme 30 ich počtom, dostaneme ich priemer.

Priemer nepárneho počtu po sebe idúcich prirodzených čísel je rovný prostrednému z čísel, teda je to celé číslo. Priemer párneho počtu za sebou idúcich prirodzených čísel je vlastne priemerom prostredných dvoch čísel a teda to nie je celé číslo.

Počet guliek	Priemer čísel guliek	Čísla guliek
2	30/2=15	nemá riešenie
3	30/3=10	9, 10, 11
4	30/4=7,5	6, 7, 8, 9
5	30/5=6	4, 5, 6, 7, 8
6	30/6=5	nemá riešenie
7	$30/7 \doteq 4,285$	nemá riešenie

Na Nea leteli 3, 4 alebo 5 guliek, čo sú spolu tri možnosti.

Úloha 5

Agenti Smith a Jones spravili v obilí mnohouholník, ktorý mal všetky vnútorné uhly menšie ako $180°$ a mal 54 uhlopriečok (strany za uhlopriečky nerátame). Koľko mal tento mnohouholník vrcholov?

Riešenie

Povedzme, že náš mnohouholník má n strán. Číslo n zatiaľ nevieme, ale vieme pomocou n vyjadriť, koľko uhlopriečok má mnohouholník s n vrcholmi. Z každého vrcholu ide uhlopriečka do všetkých ostatných vrcholov (tých by bolo $n-1$) okrem susedných (tam idú strany, ktoré za uhlopriečky nepovažujeme). Spolu teda z jedného vrchola ide $n-3$ uhlopriečok. Počet všetkých uhlopriečok je $\frac{(n-3)\cdot n}{2}$. Dvojkou sme delili preto, že všetky uhlopriečky nášho mnohouholníka sme zarátali pri našom rátani dvakrát.

Aby sme zistili počet vrcholov mnohouholníka stačí vypočítať hodnotu n z rovnosti:

$$\begin{aligned} \tfrac{n\cdot(n-3)}{2} &= 54 \\ n \cdot (n-3) &= 108. \end{aligned}$$

Túto rovnicu vyriešime rozložením 108 na súčin dvoch celých čísel. Riešením našej ulohy bude rozklad na dve čísla, z ktorých bude jedno o 3 väčšie ako druhé.

$$108 = 1 \cdot 108 \qquad 108 = 2 \cdot 54$$

$$108 = 3 \cdot 36 \qquad 108 = 4 \cdot 27$$

$$108 = 6 \cdot 18 \qquad \mathbf{108 = 9 \cdot 12}$$

Jediné riešenie, ktoré nám vyhovuje je $n = 12$. Teda náš mnohouholník má 12 vrcholov.

Úloha 6

Veštica si chcela roztriediť veštiace gule. Keď ich však chcela dať do políc tak, aby na každej polici bolo práve 5 gulí, posledná polica by bola neúplná. Keď skúšala položiť po 8 gulí do police, opäť by bola posledná polica neúplná. Na neúplnej polici vždy ostal veštici párny počet gulí. Navyše pri prvom rozdelení zabrala o 4 police viac ako pri druhom. Koľko gulí mala veštica? Napíšte všetky možnosti.

Riešenie

Označme p počet políc pri rozdelení po 5 gúľ na policu. Potom počet políc pri rozdelení po 8 gúľ na jednu policu je $p - 4$. Keďže po rozdelení na neúplnej polici bol párny počet gúľ, tak počet gúľ bol pri rozdelení po 5 gúľ na policu rovný $5p + 2$ alebo $5p + 4$. Ak boli gule rozdelené do políc po 8 tak gúľ bolo $8(p - 4) + 2$ alebo $8(p - 4) + 4$ alebo $8(p - 4) + 6$.

Ostáva prejsť jednotlivé možnosti

- Ak $5p + 2 = 8(p - 4) + 2$, tak $p = \frac{32}{3}$. Počet políc má byť celé číslo, takže tento prípad nemohol nastať.
- Ak $5p + 2 = 8(p - 4) + 4$, tak $p = 10$. Veštica mala spolu 52 gulí.
- Ak $5p + 2 = 8(p - 4) + 6$, tak $p = \frac{28}{3}$. Počet políc má byť celé číslo, takže tento prípad nemohol nastať.
- Ak $5p + 4 = 8(p - 4) + 2$, tak $p = \frac{34}{3}$. Počet políc má byť celé číslo, takže tento prípad nemohol nastať.
- Ak $5p + 4 = 8(p - 4) + 4$, tak $p = \frac{32}{3}$. Počet políc má byť celé číslo, takže tento prípad nemohol nastať.
- Ak $5p + 4 = 8(p - 4) + 6$, tak $p = 10$. Veštica mala spolu 54 gulí.

Veštica mala 52 alebo 54 gulí.

Úloha 7

Každý agent má na konci mena dvojciferné číslo. Čísla agenta Jonesa a agenta Browna sa líšia len poradím číslic. Ich súčin je 1300. Aké čísla majú agent Jones a agent Brown za menom?

Riešenie

Hľadáme dve čísla, ktorých súčin končí nulou. Znamená to, že súčin druhej cifry agenta Jonesa a druhej cifry agenta Browna musí končiť nulou. Ani jeden z nich nemôže mať na konci čísla 0. V tom prípade by druhý mal 0 na začiatku, takže ich súčin by bol iba jednociferné číslo krát dvojciferné číslo, čo je vždy menej ako 1000. Existujú štyri dvojice nenulových cifier, ktorých súčin končí nulou:

Cifry	Súčin
$\mathbf{2, 5}$	**$\mathbf{25 \cdot 52 = 1300}$**
$4, 5$	$45 \cdot 54 = 2430 \neq 1300$
$5, 6$	$65 \cdot 56 = 3640 \neq 1300$
$5, 8$	$85 \cdot 58 = 4930 \neq 1300$

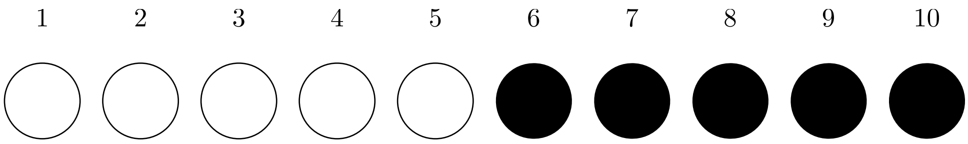
Agenti majú teda za menom čísla 25 a 52.

Úloha 8

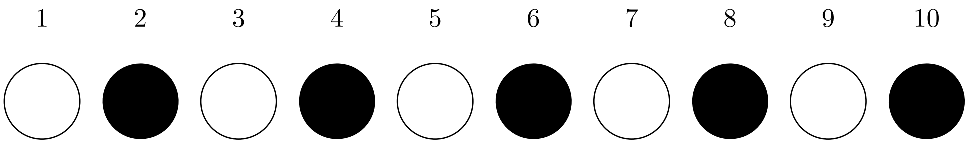
Morpheus má 5 tmavočervených a 5 svetlomodrých piluliek. Na začiatku si ich zoradil do jedného radu tak, že najprv je 5 svetlomodrých a potom 5 tmavočervených. Morpheus sa rozhodol, že pilulky bude presúvať tak, že môže vymeniť iba pilulky, ktoré ležia vedľa seba. Zistite, koľko najmenej ťahov potrebuje, aby usporiadal pilulky tak, že nebudú dve rovnakej farby vedľa seba.

Riešenie

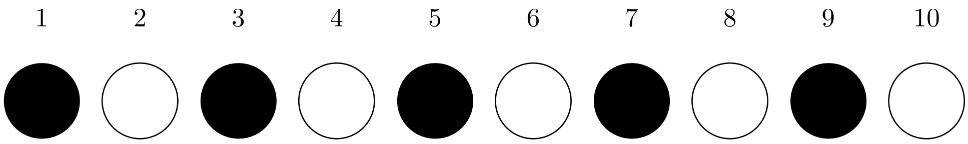
Na začiatku sú pilulky zoradené takto:



Aby žiadne dve pilulky rovnakej farby neboli vedľa seba, musí ich usporiadať takto:



alebo takto:



Každá pilulka sa jedným presunutím dá dostať len o jednu pozíciu vedľa. Tmavé pilulky máme na začiatku na pozíciach 6, 7, 8, 9, 10 a chceme ich dostať na pozície 2, 4, 6, 8, 10 alebo na pozície 1, 3, 5, 7, 9. Súčet pozícií tmavých piluliek je 6+7+8+9+10=40 a každým presunutím sa tento súčet zmenší maximálne o 1. Potrebujeme sa dostať na súčet 2+4+6+8+10=30, takže na to potrebujeme minimálne 10 ťahov. (Na pozície 1+3+5+7+9=25 by sme potrebovali minimálne 15 ťahov.)

Teraz si ukážeme, že sa to dá aj prakticky, napríklad takto:

Pilulku na pozícii 6 na štyri ťahy doľava posunieme na pozíciu 2. Potom pilulku z pozície 7 na tri ťahy na pozíciu 4 . Ďalej piluku z ôsmej pozície o 2 doľava na šestku a pilulku z deviatky jedným posunutím doľava na osmičku. Spolu sme vykonali 10 ťahov.

Úloha 9

Agent Brown je srandista a preto si kúpil 360 mydiel. Po týždni používania mydla zostane len odpad, ktorý nazveme zvyškom. Zistil, že keď spojí 5 zvyškov, tak má nové mydlo. Agent však má svoj systém, najprv použije všetky mydlá, čo má a zvyšky si zatiaľ odkladá. Keď už žiadne mydlo nemá, tak si zo všetkých zvyškov urobí čo najviac nových mydiel. To opakuje dokiaľ má z čoho vyrábať mydlá. Na koľko týždňov mu takto vystačí 360 mydiel, ktoré si dnes kúpil?

Riešenie

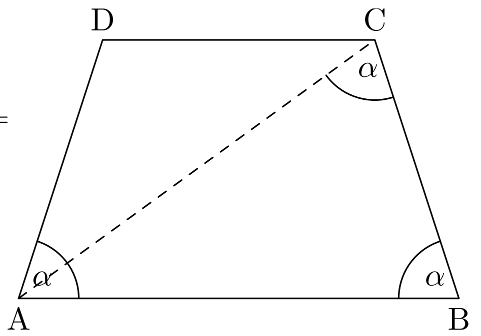
Agent Brown si 360 týždňov vystačí s originál kúpenými mydlami, pričom na konci mu zostane 360 zvyškov. Tie premení na 360/5=72 nových mydiel, ktoré mu vystačia na ďalších 72 týždňov. Spolu už prešlo 432 týždňov a agent Brown má teraz 72 zvyškov, ktoré vystačia na 14 nových mydiel a ešte sa mu zvýšia 2 zvyšky, pretože $72 = 14 \cdot 5 + 2$. Po 14 týždnov má spolu 16 zvyškov, z ktorých vyrobí 3 nové mydlá a ostane mu aj 1 zvyšok mydla. Tie mu vystačia 3 týždne a zo 4 zvyškov čo mu ostali už nedokáže spraviť nové mydlo. Mydlá mu teda pri jeho systéme vydržia $360 + 72 + 14 + 3 = 449$ týždňov.

Úloha 10

Okolo mesta Zion plánujú postaviť protihackerskú hradbu. Hradba má mať tvar lichobežníka, ktorý má tri strany rovnako dlhé a štvrtú stranu rovnako dlhú ako uhlopriečku. Aká bude veľkosť najmenšieho uhla tohto lichobežníka?

Riešenie

Označme si vrcholy daného lichobežníka písmenami A, B, C a D. Základne lichobežníka nemôžu mať rovnakú dĺžku a preto zo zadania vieme, že jedna základňa a ramená majú rovnakú dĺžku. Lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník a navyše obe jeho uhlopriečky majú rovnakú dĺžku, ktorá je rovnaká ako dĺžka jednej zo základní. Platí $|AB| = |AC| = |BD|$ (dĺžka jednej základne je rovnaká ako dĺžky uhlopriečok) a $|BC| = |CD| = |DA|$ (dĺžky troch strán lichobežníka sú zhodné).



Označme $|\sphericalangle ABC| = \alpha$. Lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný a preto aj $|\sphericalangle BAD| = \alpha$. Rovnako vieme, že uhlopriečka AC je rovnako dlhá ako základňa AB. Trojuholník ABC je rovnoramenný a preto aj $|\sphericalangle ACB| = \alpha$. Základne AB a CD sú rovnobežné a preto $|\sphericalangle BCD| = 180° - \alpha$ a teda $|\sphericalangle ACD| = 180° - 2\alpha$. Trojuholník ACD je ale rovnoramenný, pretože $|AD| = |CD|$ a teda aj $|\sphericalangle CAD| = 180° - 2\alpha$. Vieme veľkosti uhlov CAD, CAB a DAB a navyše platí:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle DAB| &= |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle CAB| \\
\alpha &= (180° - 2\alpha) + (180° - 2\alpha) \\
5\alpha &= 360° \\
\alpha &= 72°
\end{aligned}$$

Veľkosti vnútorných uhlov lichobežníka majú veľkosti 72° a 108° a najmenší uhol je 72°.

Úloha 11

Tank sa snaží dostať do Matrixu. Okolo neho sú napísané zelené čísla od 1 do 100 (každé práve raz), ktoré náhodne zostreľuje. Na to, aby sa tam dostal, musí zostreliť také čísla, aby ich súčin bol deliteľný šiestimi. Aký najmenší počet zelených čísel musí zostreliť, aby si bol istý, že sa do Matrixu dostane?

Riešenie

Aby bol súčin čísel, ktoré zostrelí deliteľný šiestimi, musí tam byť aspoň jedno číslo deliteľné dvojkou a jedno trojkou. Samozrejme, stačí, aby to bolo to isté číslo, teda číslo deliteľné šiestimi.

Od 1 do 100 je 50 čísel deliteľných dvomi a 33 deliteľných tromi. Pozrime sa na to, akú najväčšiu smolu može mať tank. Môže sa mu stať, že strieľa a dlho nevie trafiť číslo deliteľné dvojkou. To sa mu može stať 50 krát, ale na 51. pokus už vie, že aspoň jedno číslo deliteľné dvojkou trafil. Je to preto, že tých, čo netrafil, je už len 49 a deliteľných dvojkou bolo 50.

Podobne môže 67 krát netrafiť deliteľné tromi, ale po 68 strelách už má určite jedno číslo deliteľné tromi trafené, pretože ich je 33.

Z jeho strany je teda väčšia smola netrafiť deliteľné tromi. Potrebuje na to 68 pokusov, aby si bol istý. Ak strelí 68 krát, je si zároveň istý aj tým, že trafil aspoň jedno číslo deliteľné dvojkou.

Úloha 12

Mouse mal okrem zbraní ešte jednu záľubu, do štvorca 3×3 vpisoval čísla tak, aby súčet čísel v každom stĺpci, každom riadku aj na každej uhlopriečke bol rovnaký. Naposledy vpísal do pravého horného rohu číslo 7, do pravého dolného rohu číslo 10 a do dolného ľavého rohu číslo 9. Potom štvorec doplnil celými číslami. Aké číslo dal Mouse do stredu?

Riešenie

		7
	a	
9		10

Označme písmenom a číslo, ktoré sa nachádza v strede. Na jednej z uhlopriečok teda máme čísla 9, a a 7, teda je tam súčet $16 + a$ a preto všade bude takýto súčet. Preto vieme, že v ľavom hornom rohu bude číslo 6, aby na druhej uhlopriečke bol tiež súčet $16 + a$. Ďalej vieme doplniť číslo v strede horného riadku. Bude to $a + 3$, aby súčet v hornom riadku bol $16 + a$. Rovnako vieme doplniť aj do stredu spodného riadku číslo $a - 3$, aby súčet v spodnom riadku bol $16 + a$. Teraz vidíme, že súčet políčok v strednom stĺpci je $(a + 3) + a + (a - 3) = 3a$, čo má byť rovné $16 + a$. Preto máme, že $3a = 16 + a$ a teda $a = 8$. Na strednom políčku teda má byť číslo 8.

Úloha 13

Neo bol na seba právom hrdý. Svoj podpis "PAN METRIXU"nechal na každom rohu. Morpheus sa bál, aby ho nechytili a tak Neovu správu zašifroval takto do rovnosti

$$\overline{PAN} - 2 \cdot (M + E + T + R + I + X + U) = 105.$$

Trinity ale vie, že je to veľmi ľahká šifra a tak písmená v rovnosti nahradí číslicami 0-9 tak, že sa ani jedno neopakovalo a výsledok bol správny. Akú hodnotu má trojciferné číslo $\overline{PAN}$? Nájdite všetky riešenia. (Označenie $\overline{PAN}$ znamená, že ide o trojciferné číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru P, na mieste desiatok cifru A a na mieste jednotiek N.)

Riešenie

Súčet čísel od 0 po 9 je 45, čiže $P+A+N+M+E+T+R+I+X+U = 45$. Túto rovnosť dvakrát pripočítame ku rovnosti zo zadania. Na ľavej strane rovnosti budeme narábať s písmenami ako s neznámymi a tak pokrátime všetko čo sa bude dať. Na pravej strane zase využijeme platnosť rovnosti $P+A+N+M+E+T+R+I+X+U = 45$.

Upravme najprv ľavú stranu

$$\overline{PAN} - 2 \cdot (M+E+T+R+I+X+U) + 2 \cdot (P+A+N+M+E+T+R+I+X+U) = \overline{PAN} + 2(P+A+N).$$

A teraz pravú stranu

$$105 + 2 \cdot (P + A + N + M + E + T + R + I + X + U) = 105 + 2 \cdot 45$$

Výsledky dáme do rovnosti a číslo $\overline{PAN}$ nahradíme zápisom podľa zadania $\overline{PAN} = 100P + 10A + N$.

$$\begin{aligned} \overline{PAN} + 2(P + A + N) &= 105 + 2 \cdot 45 \\ 100P + 10A + N + 2(P + A + N) &= 195 \\ 102P + 12A + 3N &= 195 \\ 34P + 4A + N &= 65. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnosti vidno, že $P = 1$. Nemôže byť 0, lebo $4A + N < 65$ (A a N sú cifry) a ani nemôže byť $P \geq 2$ lebo $2 \cdot 34 = 68 > 65$. Dosadením $P = 1$ sa nám rovnosť zjednoduší na

$$4A + N = 31.$$

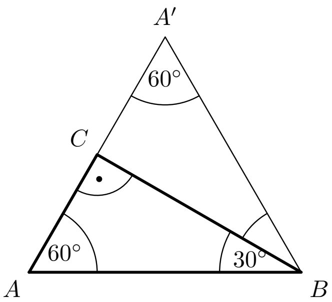
Číslo 31 dáva zvyšok 3 po delení 4. Rovnaký zvyšok musí dávať aj ľavá strana rovnosti. Preto N musí dávať zvyšok 3 po delení 4 (číslo $4A$ dáva zvyšok 0). Čiže N je buď 3 alebo 7. Pre $N = 3$ máme $A = 7$ a $\overline{PAN} = 173$. Pre $N = 7$ máme $A = 6$ a $\overline{PAN} = 167$.

Hodnota trojciferného čísla $\overline{PAN}$ môže byť 173 alebo 167.

Úloha 14

Originálny Matrix-trojuholník ABC vyzerá tak, že jeho dva vnútorné uhly majú veľkosti $|\sphericalangle BAC| = 60°$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$ a strana AC má dĺžku 1 decimeter. Aká je dĺžka strany AB v Matrix-trojuholníku?

Riešenie



Aby bol súčet uhlov trojuholníka ABC 180 stupňov, musí byť $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Dokreslíme bod A' tak, aby bol obrazom bodu A v osovej súmernosti podľa osi BC. Keďže $|\sphericalangle ACB| = 90°$, bod C leží v strede úsečky AA'. Trojuholníky ABC a $A'BC$ sú osovo súmerné podľa BC, takže musia byť zhodné. Preto

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AA'B| &= |\sphericalangle CA'B| = 60° \\ |\sphericalangle ABA'| &= |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle A'BC| \\ &= 30° + 30° = 60°. \end{aligned}$$

Z toho dostávame, že trojuholník ABA' je rovnostranný. Bod C je stred strany AA' a $|AC| = 1$ dm, tak trojuholník ABA' má všetky strany dĺžky 2 dm. Preto je $|AB| = 2$ dm.

Úloha 15

Je Neo naozaj vyvolený? spýtal sa Morfeus sám seba. Ak áno, určite mi bude vedieť povedať: Pre ktoré dvojciferné číslo n je $n \cdot (n-1)$ deliteľné 100? Neo našiel všetky také n, ale aby bol záhadný, uviedol iba ich súčet. Aká je hodnota súčtu?

Riešenie

Ak chceme, aby bol výraz $n \cdot (n-1)$ deliteľný číslom 100, musí byť deliteľný jeho prvočíselným rozkladom, teda $2^2 \cdot 5^2$. Zároveň vidíme, že ak je n deliteľné 2, potom $(n-1)$ nie je. Jediná možnosť, ako zabezpečiť, aby 2^2 delilo výraz je, že n alebo $(n-1)$ je tým deliteľné. Podobný argument použijeme pri 5^2. Vieme teda, že aspoň jeden z činiteľov je deliteľný 25. Všetky dvojciferné násobky 25 sú 25, 50 a 75, teda jeden z činiteľov vo výraze musí byť rovný niektorému z nich.

Overíme všetky možnosti. Ak $n = 25$, potom $(n-1) = 24$, čo je deliteľné 4, takže máme prvé riešenie. Ak $(n-1) = 25$, potom $n = 26$, čo nie je deliteľné 4, teda toto nevyhovuje. Žiaden z činiteľov nemôže byť rovný 50, lebo druhý činiteľ by bol 49 alebo 51, z čoho ani jeden nie je deliteľný 4. Ak $(n-1) = 75$, potom $n = 76$, čo je deliteľné 4, takže máme ďalšie riešenie. Nakoniec úplne rovnako overíme, že ak $n = 75$, ďalšie riešenie nedostaneme.

Dostávame dve riešenia $n = 25$ $(25 \cdot 24 = 600)$ a $n = 76$ $(76 \cdot 75 = 5700)$. Ich súčet je 101.

Úloha 16

Kód Matrixu sa pokazil, teraz sú to už len zelené čísla $1, 2, 3, \ldots, 2012$ v jednom rade bez čiarok. Aká je prostredná cifra tohto čísla?

Riešenie

Najprv zistíme, koľko má toto veľké číslo cifier a ktorú cifru v poradí vlastne hľadáme. Toto číslo sa skladá z 9 jednociferných čísel, 90 dvojciferných, 900 trojciferných a $2012 - 999 = 1013$ štvorciferných čísel. Dokopy má teda $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1013 \cdot 4 = 6941$ cifier. Presne uprostred je cifra na 3471. mieste.

Na zápis všetkých čísel od 1 do 999 (vrátane) sme použili $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 = 2889$ cifier. Takže na 2890. mieste je cifra 1 (z čísla 1000). Potrebujeme ešte prejsť cez $3471 - 2889 = 582$ cifier, čo je 145 štvorciferných

$(145 \cdot 4 = 580)$ čísel a ďalšie dve cifry. Číslo na 145. pozícii v rámci štvorciferných je 1144 a my potrebujeme druhú cifru v poradí za ním a tou je 1 (druhá cifra čísla 1145).

Úloha 17

Kľučiar má kľúče očíslované $1, 2, 3, \ldots, 86$. Stojí pred dverami, kde sú dve dierky, jedna na kľúč A a jedna na kľúč B. Určte počet dvojíc kľúčov, ktoré musí kľučiar vyskúšať, ak ešte vieme, že $A < B$ a súčin $A \cdot B$ je deliteľný tromi.

Riešenie

Zo zadania vieme, že buď A je deliteľné 3, alebo B je deliteľné 3 alebo obe čísla kľúčov sú deliteľné 3. Naše riešenie bude trochu trikové, spočítame všetky možnosti dvojíc A, B také, že $A < B$ odpočítame od nich tie možnosti, kedy ani jedno z čísel nie je deliteľné 3 a tým dostaneme to, čo sme chceli.

Začneme všetkými možnosťami. Číslo na kľúči B môže byť ľubovoľné číslo od 1 do 86 teda mám 86 možností výberu. Číslo na kľúči A má byť rôzne od B (menšie, zatiaľ však použijeme len, že sa nerovnajú), takže už to je len 85 možností (nemôže to byť to rovnaké číslo ako B). Dokopy teda máme ku každému rôznemu B (86 možností) 85 rôznych A, teda spolu $86 \cdot 85$ možností. Musíme ale ešte ošetriť, aby $A < B$. Takýchto možností je presne polovica (keďže sú A a B rôzne, tak buď A je väčšie alebo B a tých možností je rovnako veľa). Spolu máme

$$\frac{86 \cdot 85}{2} = 3655$$

možností výberu čísel s podmienkou, že $A < B$. Od týchto možností musíme odpočítať tie, kedy ani A ani B nie je deliteľné 3. Medzi číslami 1 až 86 je 28 čísel (od 3 do 84) deliteľných tromi a teda je $86 - 28 = 58$ čísel nedeliteľných tromi. A opäť na B máme 58 možností, na A potom k tomu už len 57 a celé to predelíme dvomi, aby sme zabezpečili, že $A < B$, t.j.

$$\frac{58 \cdot 57}{2} = 1653$$

možností výberu čísel s podmienkou, že $A < B$ a ani A ani B nie je deliteľné tromi. Dostávame teda $3655 - 1653 = 2002$ možností spĺňajúcich podmienky zadania.

Riešenie 2

Keďže podľa zadania $A < B$, stanovíme hodnotu B a k nemu v tabuľke dopočítame koľko je takých kľúčov A, pre ktoré je splnená aj podmienka, že súčin čísel na kľúčoch $A \cdot B$ je deliteľný tromi a $A < B$.

- Ak $B = 86$. Číslo na kľúči A musí byť deliteľné tromi. Takých čísel je **28** (čísla 3, 6, 9, …, 84).
- Ak $B = 85$. Číslo na kľúči A musí byť deliteľné tromi. Takých čísel je **28** (čísla 3, 6, 9, …, 84).
- Ak $B = 84$. Číslo na kľúči A môže ale nemusí byť deliteľné tromi. Takých čísel je **83** (čísla 1, 2, …, 83).
- Ak $B = 83$. Číslo na kľúči A musí byť deliteľné tromi. Takých čísel je **27** (čísla 3, 6, 9, …, 81).
- Ak $B = 82$. Číslo na kľúči A musí byť deliteľné tromi. Takých čísel je **27** (čísla 3, 6, 9, …, 81).
- Ak $B = 81$. Číslo na kľúči A môže ale nemusí byť deliteľné tromi. Takých čísel je **80** (čísla 1, 2, …, 80).
- …

Takto by sme mohli pokračovať až do prípadu $B = 3$, pre ktoré existuje $A = 2$ alebo $A = 1$, teda 2 možnosti spĺňajúce zadanie úlohy. Teraz nám ostáva už len spočítať všetky možnosti. Zapíšeme si ich po trojiciach do tabuľky. Ako z tabuľky vidno čísla v prvom a druhom stĺpci klesajú o jedna a v treťom stĺpci o tri.

28	28	83
27	27	80
26	26	77
…	…	…
1	1	2
406	406	1190

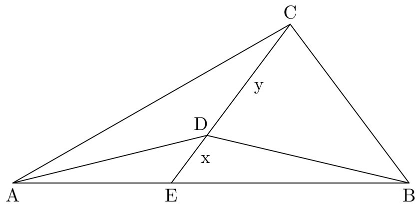
Spolu máme $406 + 406 + 1190 = 2002$ možností.

Úloha 18

Kým prišiel Neo k veštici bol v miestnosti s kopou podivných niečorobiacich detí. Neo zaujatý obišiel chlapca, ktorý ohýbal lyžičku mysľou a podišiel k mladej dievčine, ktorá mala na papieri nakreslený trojuholník ABC. Vnútri trojuholníka ABC bol daný bod D. Priamka prechádzajúca bodmi C a D pretínala úsečku AB v bode E. Dievčina mu vysokým hlasom povedala: Zisti pomer $|AE| : |EB|$, Neo, ak vieš, že obsah trojuholníka AED je $2,8\ \text{cm}^2$, obsah trojuholníka CAD je $9,8\ \text{cm}^2$ a obsah trojuholníka CDB je $4,2\ \text{cm}^2$. Dievčinka sa od neho dozvedela správnu odpoveď. Aké číslo povedal Neo dievčine?

Riešenie

Obsah trojuholníka závisí od strany trojuholníka a výšky na ňu. Keď dva trojuholníky majú rovnako veľkú výšku, tak pomer ich obsahov je rovnaký ako pomer strán prislúchajúcich k tej danej výške. Nech S_1 je obsah trojuholníka AED a S_2 je obsah trojuholníka ADC. Potom $S_{AED} = x \cdot v/2$ a $S_{ADC} = y \cdot v/2$. Pomer obsahov týchto trojuholníkov je rovný pomeru strán:



$$\frac{S_{AED}}{S_{ADC}} = \frac{x}{y}.$$

Trojuholníky AED a CAD majú spoločnú výšku z bodu A (na strany ED, CD), preto pomer týchto strán sa rovná pomeru obsahov týchto trojuholníkov ako sme ukázali.

$$\frac{|ED|}{|CD|} = \frac{2{,}8}{9{,}8} = \frac{2}{7}.$$

Trojuholníky EBD a CBD majú tiež spoločnú výšku spustenú z vrcholu B (na strany ED, CD), preto pomer obsahov trojuholníkov EBD a CBD je rovnaký ako pomer strán $|ED| : |CD|$.

$$S_{EBD} = \frac{2}{7} \cdot 4{,}2 = 1{,}2.$$

Nakoniec máme trojuholníky AED a EBD, ktorých obsah poznáme a vieme, že majú spoločnú výšku vedenú z bodu D (na strany AE, EB – to sú strany, ktorých pomer chcem zistiť).

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{S_{AED}}{S_{EBD}} = \frac{2{,}8}{1{,}2} = \frac{7}{3}.$$

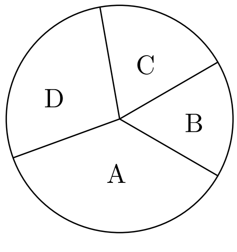
Pomer $|AE| : |EB| = 7 : 3$

Úloha 19

Na lodi Nabuchodonozor sa ich každodenný obed skladá maximálne zo štyroch rôznych jedál. Kuchár sa rozhodol, že jedlo bude servírovať na kruhový tanier do štyroch rôzne veľkých kruhových výsekov tak, aby na žiadnych dvoch susedných nebolo rovnaké jedlo, pričom žiaden kruhový výsek nebude prázdny. Koľko rôzne vyzerajúcich tanierov môže naservírovať?

Riešenie

Rozdelíme kruhový tanier na 4 rôzne veľké výseky. Označme štyri jedlá A, B, C, D. Na ten najväčší výsek máme 4 možnosti, ktoré jedlo naň dať (pre ukážku, nech je to A). Pozrime sa, čo dať na druhý výsek (vezmime jeden z výsekov, ktorý je vedľa najväčšieho). Ku každej z týchto 4 možností (pre najväčší výsek) máme 3 možnosti pre druhý výsek (jedlo, ktoré je v najväčšom použiť nemôžeme, keďže na susedných výsekoch nemôžu byť rovnaké jedlá). V našom prípade to nemôže byť A, teda je to buď B, C alebo D (nech je to teda B). Čo teraz môže byť v druhom zo susedných výsekov najväčšieho? Rozoberme teraz jednotlivé prípady pre výsek vedľa najväčšieho z druhej strany (nemôže to byť to jedlo, ktoré je v najväčšom, teda A), máme teda 3 možnosti:



- B – potom v poslednom výseku môže byť A, C alebo D (z oboch strán je susedné rovnaké jedlo – B), teda 3 možnosti
- C – potom v poslednom výseku nemôže byť C ani B (ktoré sú susedné), teda 2 možnosti
- D – potom v poslednom výseku nemôže byť D ani B (ktoré sú susedné), teda 2 možnosti

Dokopy pre posledné 2 výseky máme teda $3+2+2=7$ možností. Spolu teda $4\cdot 3\cdot 7=84$ rôzne vyzerajúcich tanierov.

Riešenie 2

Rozdelíme si kruhový tanier na 4 rôzne veľké výseky. Na najväčší výsek máme 4 možnosti, aké jedlo tam dať. Pozrime sa teraz na dva výseky, ktoré sa nachádzajú vedľa najväčšieho. V týchto výsekoch môžu byť buď rovnaké alebo rôzne jedlá, tak rozoberme tieto dva prípady:

- Ak sú v susedných výsekoch rovnaké jedlá. V tom prípade na ne máme 3 možnosti čo na ne umiestnime. Jednoducho tam môžeme dať hociktoré z jedál okrem toho, čo je v najväčšom výseku. Do posledného výseku máme znova tri možnosti, keďže môžme použiť všetky jedlá okrem toho susedného (na oboch stranách je rovnaké), dokopy máme teda $4\cdot 3\cdot 3=36$ možností.
- Ak sú v susedných výsekoch rôzne jedlá. Ak sú rôzne, tak na prvý susedný výsek máme tri možnosti (iné ako v najväčšom výseku), na druhý susedný výsek už len dve možnosti (iné ako v najväčšom a prvom susednom výseku). Do posledného výseku môžeme dať jedine jedlo z najväčšieho výseku, alebo to, čo na tanieri ešte nie je (spolu 2 možnosti). Dokopy máme v tomto prípade $4\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$ možností.

Spolu môžeme naservírovať $36+48=84$ rôzne vyzerajúcich tanierov.

Úloha 20

Veštica je tiež len človek a tak nevie všetko, vie iba skoro všetko. Ak z číslic $1,2,3,\dots,9$ (každej práve raz) vytvoríte 3 trojciferné čísla v pomere $1:3:5$, veštica ich nebude poznať. Pomôžte jej zistiť, aké bude najmenšie číslo.

Riešenie

Máme zistiť najmenšie číslo – označme ho x, ak vieme, že čísla x, $3x$ a $5x$ sú trojciferné a spolu obsahujú 9 rôznych cifier (1 až 9) a to každú práve raz. Všimnime si najprv, že tretie číslo je v tvare $5x$, čo znamená, že je deliteľné 5, a teda musí končiť cifrou 0 alebo 5. Cifra 0 však použitá nebola, takže posledná cifra čísla $5x$ je 5. Druhé číslo je $3x$, teda deliteľné 3, to znamená, že jeho ciferný súčet je deliteľný 3, čo zatiaľ využiť nevieme.

Pozrime sa teraz na prvé číslo – vieme, že po vynásobení tohto čísla 5 dostaneme stále trojciferné číslo končiace na cifru 5. Aká je teda prvá cifra čísla x? Môže to byť jedine cifra 1, pretože ak by bola väčšia ako 1, išlo by o číslo aspoň 200, ktoré keď vynásobíme 5, dostaneme aspoň 1000, čo je už 4-ciferné číslo. Aká je posledná cifra x? Vieme, že po vynásobení x číslom 5 dostaneme číslo $5x$, ktoré končí na 5 – to znamená, že posledná cifra musí byť nepárna (nemôže byť však ani 1 ani 5, keďže tieto cifry už máme použité). Posledná cifra x je teda 3, 7 alebo 9. Cifra 7 nemôže byť poslednou cifrou čísla x, lebo potom by číslo $3x$ končilo cifrou 1 (túto cifru už máme použitú). Číslo x je buď $\overline{1a3}$ alebo $\overline{1b9}$. Rozoberme teraz tieto dva prípady.

- Ak $x=\overline{1a3}$. V tomto prípade číslo $3x$ končí na cifru 9. Prvá cifra čísla $3x$ môže byť jedine 3, 4 alebo 5, nakoľko číslo $3x>300$ a zároveň $3x<600$. Avšak cifry 3 a 5 už sú použité, preto $3x=\overline{4c9}$. Číslo x musí mať strednú cifru 6, nakoľko to je jediná z nepoužitých cifier, pre ktorú číslo $3x$ začína cifrou 4. Týmto je x jednoznačne dané, $x=163$. Potom $3x=489$ a $5x=615$, čo nevyhovuje, nakoľko cifra 1 by bola použitá 2-krát a cifra 7 ani raz.
- Ak $x=\overline{1b9}$. V tomto prípade číslo $3x$ končí na cifru 7. Pre prvú cifru $3x$ máme zase tri možnosti 3, 4 alebo 5 (5 už ale máme použitú), takže rozoberieme dva prípady: $3x=\overline{3d7}$ a $3x=\overline{4e7}$.
  - Ak $3x=\overline{3d7}$. Cifra b v strede čísla x musí byť 2 (cifry 1 a 3 sme už použili). Trojciferné čísla budú $x=129$, $3x=387$ a $5x=645$, čo vyhovuje zadaniu.
  - Ak $3x=\overline{4e7}$, potom $b=6$ (nakoľko 4 a 5 už sú použité a iné to byť nemôže, aby $3x$ začínalo 4kou), teda $x=169$, $3x=507$ a $5x=845$. A to nevyhovuje podmienkam zadania, nakoľko cifra 5 je v dvoch číslach, cifra 0 nemala byť v žiadnom čísle a cifry 2 a 9 chýbajú.

Najmenšie číslo je 129.

Hlavolam 1

Máme 1000 jabĺk a 10 debničiek. Chceme týchto 1000 jabĺk rozdeliť do týchto debničiek, a to tak, aby sa pomocou týchto debničiek dal vyskladať ľubovoľný počet jabĺk od 1 do 1000. Môžeme vždy použiť niekoľko celých debničiek. Koľko jabĺk bude v debničke s najväčším počtom jabĺk?

Riešenie

Do prvej debničky dáme 1 jablko (keďže potrebujeme vyskladať jablká od 1). Do druhej by sme mohli dať znovu 1 jablko, ale nakoľko debničiek máme len 10, tak nimi nechceme zbytočne plytvať. Takže do druhej debničky dáme 2 jablká. Takto vieme pomocou prvých dvoch debničiek vyskladať aj 3 jabĺka. Potrebujeme vedieť vyskladať debničky tak, aby sme dostali 4 jabĺka. Je nám lepšie zobrať debničku so 4 jabĺkami, ako s 3 alebo 2 jabĺkami, nakoľko pomocou debničky so 4 jabĺkami a predchádzajúcimi debničkami vieme vyskladať jablká až po 7 (7 jabĺk dostaneme použitím všetkych troch debničiek). Podobne postupujeme aj ďalej. Berieme 8 jabĺk do debničky (vieme teda vyskladať s pomocou predchádzajúcich debničiek jabĺka od 1 do 15, keď vezmeme všetky debny), ďalej 16, 32, 64, 128, 256.

Doteraz vieme vyskladať maximálne $1 + 2 + \cdots + 256 = 511$ jabĺk a použili sme 9 debničiek, takže do tej poslednej dáme zvyšok, čo je $1000-511 = 489$ jabĺk. Pomocou týchto 10 debničiek vyskladáme ľubovoľný počet jabĺk od 1 do 1000. Na vyskladanie 1 až 511 jabĺk nám postačí použiť niektoré z prvých deviatich debničiek. Pre vyskladanie 512 až 1000 jabĺk použijeme desiatu debničku a chýbajúce jablka doplníme pomocou prvých deviatich debničiek.

V debničke s najväčším počtom jabĺk bude 489 jabĺk.

Hlavolam 2

Doplňte číslo, ktoré logicky nasleduje: $55, 53, 64, 61, 73, 69, ?$

Riešenie

Pozrime sa na to, ako sa z prvého čísla dostaneme na druhé, z druhého na tretie, ... Od 55 odčítame 2 a máme 53, potom pripočítame 11, odpočítame 3, pripočítame 12, odpočítame 4 a čo teraz? Všimneme si, že sa odpočítavanie a pripočítavanie strieda a vždy po jednom pripočítaní a odpočítaní sme sa posunuli o 9 (-2+11, -3+12). Teraz máme -4, takže treba doplniť +13 (aby bol súčet 9), takže naše číslo je 69+13=82.

Hlavolam 3

Aké písmeno patrí namiesto otáznika?

A	I	H
?	B	D
8	11	12

Riešenie

V hlavolame stačí nahradiť písmená číslami a to takými, v akom poradí sa nachádzajú v abecede, teda $A = 1$, $B = 2$, $D = 4$, $H = 8$ a $I = 9$. Teraz už lepšie vidno, že sčítaním prvých dvoch riadkov dostaneme tretí ($I + B = 9 + 2 = 11$ a $H + D = 8 + 4 = 12$). Preto v prvom stĺpci potrebujeme písmeno na siedmom mieste v abecede, čo je písmeno G.

Hlavolam 4

Vyraďte trojicu, ktorá sem logicky nepatrí:
A) kohút, les, more
B) mačka, noha, oči
C) frak, gorila, hlava
D) hotel, ihla, jablko
E) dom, eben, guma
F) ruka, stôl, trúbka

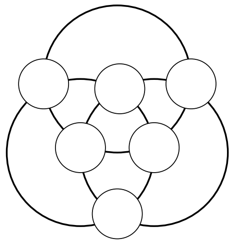
Riešenie

Hľadáme nejakú vlastnosť, ktorú päť trojíc slov spĺňa a jedna trojica nie. Všimneme si, že jednotlivé slová spolu nijak významovo nesúvisia. Pozrime sa však na ich prvé písmená:
A) **k**ohút, **l**es, **m**ore
B) **m**ačka, **n**oha, **o**či
C) **f**rak, **g**orila, **h**lava
D) **h**otel, **i**hla, **j**ablko
E) **d**om, **e**ben, **g**uma
F) **r**uka, **s**tôl, **t**rúbka

Pri všetkých možnostiach okrem E) pismená v abecede nasledujú za sebou. Takže sme našli vlastnosť, ktorú možnosť E) nespĺňa.

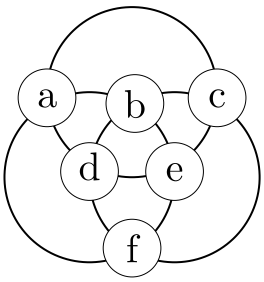
Hlavolam 5

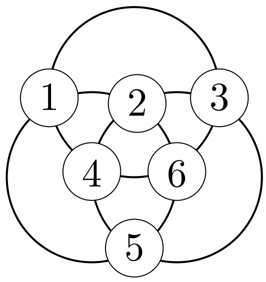
Do šiestich krúžkov na obrázku povpisujte prirodzené čísla od 1 do 6 (každé práve raz) tak, aby súčet čísel na obvode každej kružnice bol rovnaký. Riešení je viac, postačí jedno správne.



Riešenie

Každé dve kružnice majú dva krúžky spoločné. Súčet na tých dvoch kružniciach sa rovná, ak sa rovná súčet tých dvoch krúžkov, ktoré nie sú spoločné. Takže dostaneme, že $c+d=b+f$, $a+e=c+d$ a $a+e=b+f$, z toho $c+d=b+f=a+e$. Chceme ešte zistiť, akému číslu sa tieto tri súčty rovnajú. Dokopy dávajú všetkých 6 čísel, čiže súčet $1+2+\dots+6=21$, z toho každá dvojica dáva súčet $21/3=7$. Teda súčty sú $1+6$, $2+5$ a $3+4$. Na každej kružnici sa nachádzajú dve také dvojice čísel, preto je všade rovnaký súčet a to 14. Je jedno, ktorej písmenkovej dvojici priradíme ktorú číselnú dvojicu, riešení je preto viac, toto je jedno z nich:





Hádanka 1

Ktorý operenec má v prostriedku oko?

(Sokol)

Hádanka 2

Cez jednu dieru vojdeš dnu, ale až keď si cez tri diery vyšiel, vtedy si skutočne vnútri.

(Pulóver)

Hádanka 3

Daj mi jedlo, budem žiť. Daj mi vodu a zomriem.

(Oheň)

Hádanka 4

Ten kto ma vyrába, ma nepotrebuje, ten kto ma kupuje ma nepoužije a ten komu som na úžitok ma nikdy neuvidí.

(Truhla)

Hádanka 5

Dva razy sa rodí, i lieta i chodí.

(Motýľ)

Vydanie publikácie podporili:

Agentúra na podporu výskumu a vývoja
ako projekt
LPP-0057-09 *Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží*

autori:	Jana Baranová, Róbert Hajduk, Dáša Krasnayová, Tomáš Kocák, Matúš Stehlík, Monika Vaľková
názov:	**Lomihlav – 30.11.2012**
vydavatelia:	Ústav matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach Združenie STROM
adresa:	Jesenná 5, 041 54 Košice
www:	http://matik.strom.sk
rok vydania:	2012
rozsah:	16 strán