Lomihlav

Košice 29. 11. 2013

Úloha 1: Kamionista Arnold sa rozhodol, že bude šetriť životné prostredie a tankovať len BIO-palivo s obsahom cukrovej repy. Jeho kamión je však prieberčivý a jazdí len na palivo, ktoré obsahuje $2{,}5\,\%$ cukrovej repy. Aký objem paliva so $4\,\%$ obsahom cukrovej repy treba zmiešať s palivom s $1\,\%$ cukrovej repy, aby sme dostali 12 litrov paliva s $2{,}5\,\%$ cukrovej repy?

Výsledok: 6 litrov

Riešenie: Objem paliva so $4\,\%$ obsahom cukrovej repy označíme ako x a objem paliva s $1\,\%$ obsahom cukrovej repy ako y. Zo zadania vieme, že ak tieto palivá zlejeme dokopy ich objem bude 12 litrov:

$$x + y = 12.$$

Ďalej vieme povedať, že v x litroch $4\,\%$ paliva bude $0{,}04x$ litrov cukrovej repy a v y litroch $1\,\%$ paliva bude $0{,}01y$ litrov cukrovej repy a v 12 litroch $2{,}5\,\%$ paliva bude $0{,}025 \cdot 12$ litrov repy.
Ak dáme tieto poznatky dokopy, dostaneme rovnicu

$$0{,}04x + 0{,}01y = 0{,}025 \cdot 12.$$

Vyriešením týchto dvoch rovníc o dvoch neznámych dostaneme, že $x = 6$ a $y = 6$.
Treba doliať 6 litrov paliva so $4\,\%$ obsahom do 6 litrov s $1\,\%$ obsahom cukrovej repy.

Iné riešenie: Je viac než podozrivé, že zo $4\,\%$ a $1\,\%$ repového paliva chceme namiešať $2{,}5\,\%$ palivo, keďže $2{,}5$ je presne „medzi“ 1 a 4. Napovedá to teda, že jedného aj druhého paliva bude rovnako. Keďže máme namiešať 12 litrov, tak jedného aj druhého paliva bude po 6 litrov.
Ak si urobíme skúšku:

$$\frac{6 \cdot 4\,\% + 6 \cdot 1\,\%}{12} = 2{,}5\,\%,$$

tak vidíme, že to sedí.

Úloha 2: Kamionista Laci má pomôcť pri prevoze Antilopy, Bobra, Cikády, Ďateliny, Egrešov, Fikusa. Do kamiónu vie zobrať dva druhy zvieraťa a dva typy rastliny. Pre prevoz je potrebné, aby boli splnené nasledujúce podmienky:

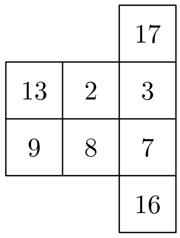
- Antilopa musí žrať cestou Egreše.
- Bobor nesmie cestovať s Egrešmi ani s Fikusom, lebo je na nich alergický.
- Cikáda nesmie cestovať s Bobrom, lebo by ju zašliapol.

Koľko rôznych takýchto zásielok sa dá zostaviť za takýchto podmienok?

Výsledok: 2 zásielky

Riešenie: Keďže Bobor nesmie cestovať ani s Egrešmi ani s Fikusom a v kamióne musia byť dva typy rastlín, tak ak by sme dali Bobra do kamiónu, vieme vybrať už len jednu rastlinu. Bobor teda cestovať v kamióne nemôže. Takže v kamióne bude cestovať Antilopa a Cikáda.
Antilopa musí žrať Egreše, teda v kamióne budú aj Egreše. Teraz máme ešte 2 možnosti, ako naložiť kamión. Môže tam ísť Fikus alebo Ďatelina.
Môže previesť 2 rôzne zásielky a to Antilopu, Cikádu, Egreše a Fikus alebo Antilopu, Cikádu, Egreše a Ďatelinu.

Úloha 3: Kamionista Zolo má na podlahe v kamióne položený obrazec z 8 štvorcových dlaždíc, na ktorých sú napísané čísla. Chce odobrať dve dlaždice z obrazca tak, aby si útvar postavený z dlaždíc zachoval celistvosť, svoj obvod a aby bol súčet čísel na dlaždiciach čo najväčší. Dlaždice s ktorými číslami má odobrať, aby splnil predpísané podmienky?



Výsledok: 13 a 2

Riešenie: Celkový súčet na pôvodnom útvare je 75. A ak chceme, aby bol súčet aj po odobratí maximálny, vyberieme tú dvojicu dlaždíc, ktorá má najmenší súčet a po ich odobratí si útvar zachová svoj obvod aj celistvosť. Odobrať dve dlaždice, aby ostal zachovaný obvod aj celistvosť vieme urobiť 6 spôsobmi:

1. Odoberieme dlaždice s číslami 13 a 2, celkový súčet sa zmenší o $13 + 2 = 15$.
2. Odoberieme dlaždice s číslami 16 a 2, celkový súčet sa zmenší o $16 + 2 = 18$.
3. Odoberieme dlaždice s číslami 17 a 2, celkový súčet sa zmenší o $17 + 2 = 19$.
4. Odoberieme dlaždice s číslami 9 a 8, celkový súčet sa zmenší o $9 + 8 = 17$.
5. Odoberieme dlaždice s číslami 16 a 8, celkový súčet sa zmenší o $16 + 8 = 24$.
6. Odoberieme dlaždice s číslami 17 a 8, celkový súčet sa zmenší o $17 + 8 = 25$.

Vidíme, že najmenšiu hmotnosť sme odobrali v prvom prípade, a preto to je naše riešenie.

Úloha 4: Kamionista Matúš uvidel dopravnú značku v tvare trojuholníka so stranami $6{,}31$ a $0{,}68$ centimetra. Koľko centimetrov má tretia strana značky, ak vieme, že je to celé číslo?

Výsledok: 6

Riešenie: Z trojuholníkovej nerovnosti vieme, že súčet ľubovoľných dvoch strán trojuholníka nesmie byť menší (ani rovný), ako tretia strana. Rovnako rozdiel ľubovoľných dvoch strán nesmie byť väčší (ani rovný) tretej strane trojuholníka. V našom prípade teda platí

$$\begin{aligned} 6{,}31 + 0{,}68 &> x \\ 6{,}31 - 0{,}68 &< x \end{aligned}$$

kde x je tretia strana trojuholníka. Z daných nerovností vyplýva, že

$$5{,}63 < x < 6{,}99.$$

Keďže vieme, že x je celé číslo, tak $x = 6$.

Úloha 5: Na jar sa vážili traja kamionisti. Prvý prišiel najľahší Zolo, po ňom stredne ťažký Laci a nakoniec najťažší, najsilnejší a najkrajší Matúš. Keby Matúš vážil o 121 kamikíl viac, vážil by dokopy toľko, čo Zolo a Laci teraz. Keď si Matúš zoberie 246 kamikilový vak, tak bude vážiť toľko, čo vážia všetci traja spolu. Koľko kamikíl váži Zolo, ak viete, že váha váži v celých kamikilách?

Výsledok: 122 kamikíl

Riešenie: Zaoberajme sa najprv vetou *Keď si Matúš zoberie 246 kamikilový vak, tak bude vážiť toľko, čo vážia všetci traja spolu*. Hovorí nám, že Zolo a Laci vážia spolu 246 kamikíl.
Prejdime na vetu *Keby Matúš vážil o 121 kamikíl viac, vážil by dokopy toľko, čo Zolo a Laci teraz*. Tá nám hovori, že Matúšova váha je $246 - 121 = 125$ kamikíl.
Ostáva nám len určiť, koľko váži Zolo a koľko váži Laci. Matúš je najťažší v partii, preto Laci bude mať najviac 124 kamikíl. V tom prípade by Zoli mal $246 - 124 = 122$ kamikíl. Ak by mal Laci len 123 kamikíl, Zoli by mal tiež 123, a teda by nemal menej ako Laci. Ak by mal Laci ešte menej ako 123 kamikíl, Zoli by mal viac ako on, čo nie je v súlade so zadaním.
Zoli má preto 122 kamikíl.

Úloha 6: ŠPZ Zoliho kamiónu je okrem dvoch písmen tvorená päťciferným číslom s nasledujúcimi vlastnosťami:

- škrtnutím druhej cifry zľava (t.j. cifry na mieste tisícok) dostaneme číslo, ktoré je deliteľné dvomi,
- škrtnutím tretej cifry zľava dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné tromi,
- škrtnutím štvrtej cifry zľava dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné štyrmi,
- škrtnutím piatej cifry zľava dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné piatimi,
- ak neškrtnem žiadnu cifru, tak číslo je deliteľné šiestimi,
- cifry sú navzájom rôzne.

Aké najväčšie číslo môže byť na ŠPZ?

Výsledok: 98604

Riešenie: Označme cifry ŠPZ v poradí zľava doprava A, B, C, D, E. Päťciferné číslo ŠPZ bude $\overline{ABCDE}$. Zo zadania nám vyplývajú podmienky:

1. Cifra E musí byť párna, pretože číslo $\overline{ACDE}$ je párne.
2. Číslo $\overline{ABDE}$ a teda aj jeho ciferný súčet $A + B + D + E$ je deliteľný 3.
3. Číslo $\overline{CE}$ je deliteľné 4, vďaka pravidlu deliteľnosti štyrmi.
4. Vďaka pravidlu deliteľnosti 5, D je buď 0 alebo 5.
5. Číslo $\overline{ABCDE}$ musí byť deliteľné 3, a teda $A + B + C + D + E$ je deliteľné 3.

Z druhej a piatej podmienky vyplýva, že C je deliteľné 3. Hľadáme najväčšie také číslo $\overline{ABCDE}$, ktoré vyhovuje všetkým podmienkam a zároveň má všetky cifry rôzne.
Ideme postupne od prvej cifry a dávame čo najväčšie cifry, aké sú možné. Preto $A = 9$ a $B = 8$. Na pozícii C musí byť číslo deliteľné 3, a čo najväčšie, teda $C = 6$.
Podľa podmienky 3 číslo $\overline{6E}$ musí byť deliteľné 4, teda $E = 4$ alebo $E = 0$. Z podmienky 4 musí byť $D = 0$ alebo $D = 5$. Rozoberme všetky 4 možnosti:

- Ak $E = 0$ a $D = 0$. V tomto prípade pre ciferný súčet platí

$$A + B + C + D + E = 9 + 8 + 6 + 0 + 0 = 23.$$

  Ciferný súčet nie je deliteľný 3.

- Ak $E = 0$ a $D = 5$. V tomto prípade pre ciferný súčet platí

$$A + B + C + D + E = 9 + 8 + 6 + 5 + 0 = 28.$$

  Ciferný súčet nie je deliteľný 3.

- Ak $E = 4$ a $D = 0$. V tomto prípade pre ciferný súčet platí

$$A + B + C + D + E = 9 + 8 + 6 + 0 + 4 = 27.$$

  Ciferný súčet je deliteľný 3 a päťciferné číslo na ŠPZ je 98604.

- Ak $E = 4$ a $D = 5$. V tomto prípade pre ciferný súčet platí

$$A + B + C + D + E = 9 + 8 + 6 + 5 + 4 = 32.$$

  Ciferný súčet nie je deliteľný 3.

Najväčšie také číslo je 98604.

Úloha 7: Kamionista Matúš cestuje stadzi až semka. Šestinu jeho cesty počúval Senzi Senzus, dvanástina cesty uplynula, keď počúval Drišľak. Sedminu cesty potom počúval Roba Kazíka. Potom uplynulo ešte 5 hodín ticha, než bol obšťastnený pesničkou od Helenky Vondráčkovej. Helenka mu spievala iba polovicu cesty. Nešťastný kamionista ďalej šoféroval bez Helenkinho spevu ešte štyri hodiny, kým si pustil Michala Davida a havaroval a narazil do zvodidiel. Koľko hodín cestoval, kým narazil do zvodidiel?

Výsledok: 84 hodín

Riešenie: Ak sčítame všetky úseky cesty, vyjde nám, že Matúš cestoval

$$5 + 4 = 9 \text{ hodín a } \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{75}{84} = \frac{25}{28} \text{ cesty.}$$

Dokopy teda 9 hodín a $\frac{25}{28}$ cesty tvorí celú cestu. Tých 9 hodín sú $\frac{3}{28}$ cesty a $\frac{1}{28}$ cesty sú preto 3 hodiny. Celá cesta trvala $3 \cdot 28 = 84$ hodín.

Úloha 8: Po havárii došiel Matúš po vlastných nohách do nemocnice. V čakárni je 1000 miest na sedenie. Tie sú usporiadané do 10 radov tak, že počty sedadiel v každých dvoch nasledujúcich radoch sa líšia vždy o rovnaký počet miest. Rady v čakárni sú usporiadané od radu s najmenším počtom sedadiel (prvý rad) až po rad s najväčším počtom sedadiel (posledný rad). V prvom rade je 46 sedadiel. Koľko sedadiel je v poslednom rade?

Výsledok: 154 sedadiel

Riešenie: Označme rozdiel v počte sedadiel medzi jednotlivými radmi ako x. Potom v prvom rade je 46 sedadiel, v druhom $46 + x$, v treťom $(46 + x) + x = 46 + 2x$ sedadiel, a tak ďalej až v desiatom rade je

$46 + 9x$ sedadiel. Dokopy je sedadiel 1000 . Dosadením do rovnice dostávame:

$$\begin{aligned} 46 + (46 + x) + (46 + 2x) + \ldots + (46 + 9x) &= 1000 \\ 10 \cdot 46 + (1 + 2 + \ldots + 9) \cdot x &= 1000 \\ 460 + 45x &= 1000 \\ 45x &= 540 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

V poslednom rade bude $46 + 9 \cdot 12 = 154$ sedadiel.

Úloha 9: Matúšova zdravotná karta v tvare štvorca 4×4 je rozdelená na 16 jednotkových štvorcov. Koľko je tam dohromady štvorcov a obdĺžnikov?

Výsledok: 100

Riešenie: Obdĺžnik vieme ohraničiť dvoma zvislými a dvoma vodorovnými čiarami. Náš rozdelený štvorec má päť zvislých a päť vodorovných čiar. Ak vyberieme dve zvislé a dve vodorovné, určí nám to jednoznačne obdĺžnik. Ak vyberieme rôzne dvojice čiar, určí nám to rôzne obdĺžniky. Všetkých obdĺžnikov bude toľko, koľko máme možností, ako vybrať čiary, ktoré ho ohraničujú. Spôsobov, koľkými môžeme vybrať dvojicu čiar z piatich čiar je 10. Spôsobov, ako vybrať dve zvislé a dve vodorovné čiary je $10 \cdot 10 = 100$.
Pozn.: Štvorec je špeciálnym prípadom obdĺžnika a teda v našom riešení sú zarátané aj štvorce.

Úloha 10: Číslo objednávky pre donášku zajačikov je milión ciferné a skladá sa z cifier 0 a 1. Naše číslo objednávky bolo zaujímavé v tom, že bolo v tvare

$$1010010001000010000010000000\ldots$$

Išlo vlastne o postupný zápis násobkov desiatich (10, 100, 1000, ...) až pokiaľ sme nenapísali milióntu cifru (teda posledný zapisovaný násobok desiatich už nemusel byť napísaný celý). Koľko jednotiek obsahuje číslo našej objednávky?

Výsledok: 1414 jednotiek

Riešenie: Počty cifier jednotlivých násobkov desiatich je 2, 3, 4, 5, ..., n, kde n je posledný, n-ciferný násobok desiatich, ktorý bol v objednávke napísaný celý.
Hľadáme celé číslo n, pre ktoré bude platiť nerovnica

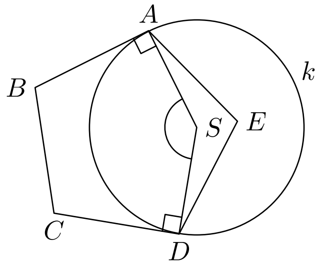
$$2 + 3 + \ldots + n \leq 1000000.$$

Ľavá časť našej nerovnice sa rovná $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, nakoľko $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Dosadením do nerovnice dostávame

$$n(n + 1) \leq 2000002.$$

Hľadáme také n, že súčin dvoch za sebou idúcich čísel je najviac 2000002. Po chvíľke odhadovania zistíme, že $n = 1413$, lebo $1413 \cdot 1414 = 1997982$ a $1414 \cdot 1415 = 2000810$, čo je už veľa. Na objednávke sú napísané násobky desiatich od 1 až po 1413 násobok plus je napísaný začiatok nasledujúceho násobku. Keďže jednotka je na začiatku každého násobku desiatich, tak v tomto čísle je napísaných 1414 jednotiek.

Úloha 11: Zolo mal v kamióne voňavý stromček v tvare kružnice k a druhý v tvare pravidelného 5-uholníka $ABCDE$ taký, že strana CD sa dotýka kružnice k v bode D a strana AB sa dotýka kružnice k v bode A. Ďalej vieme, že bod E leží vo vnútri k. Zistite, aký uhol zvierajú ramená AS a DS, pričom S je stred kružnice k.



Výsledok: $144°$

Riešenie: Keďže ide o pravidelný 5-uholník, tak všetky jeho vnútorné uhly majú rovnakú veľkosť. Koľko to je? No sú tam 3 neprekrývajúce sa trojuholníky (ABC, ACD, ACE), teda

$$\frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°.$$

Pozrime sa teraz na 4-uholník $ASDE$. Poznáme všetky jeho vnútorné uhly okrem toho, čo máme vypočítať

- $|\sphericalangle DEA| = 108°$ (vnútorný uhol 5-uholníka),
- $|\sphericalangle EAS| = 108° - 90° = 18°$,
- $|\sphericalangle EDS| = 108° - 90° = 18°$ (keďže SA, resp. SD sú kolmé na AB, resp. DC, pretože sa dotýkajú kružnice).

Zvyšný vnútorný uhol 4-uholníka ($|\sphericalangle ADS|$) je teda

$$360° - 108° - 18° - 18° = 216°.$$

Takže ramená AS a DS zvierajú uhol $360° - 216° = 144°$.

Úloha 12: Laci s Matúšom si radi krátia voľné chvíle na odpočívadle vymýšľaním čísel. Laci si napíše štvorciferné číslo. Toto číslo zaokrúhli na desiatky, stovky a tisícky a všetky tri výsledky zapíše pod pôvodné číslo. Všetky štyri čísla správne sčíta a vyjde mu nejaké číslo. Minule mu vyšlo číslo 5443. Na aké číslo myslel Laci?

Výsledok: 1473

Riešenie: Označme myslené číslo $\overline{ABCD}$ (A je prvá cifra, B je druhá cifra, …). Ak si napíšeme pod seba tie čísla, tak to bude vyzerať takto:

$$\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\
A & B & C' & 0 \\
A & B' & 0 & 0 \\
A' & 0 & 0 & 0 \\
\hline
5 & 4 & 4 & 3
\end{array}$$

(X' znamená, že cifra môže byť vyššia o 1, ak sme predchádzajúcu cifru zaokrúhlili nahor)
Na poslednom mieste je $D + 3 \cdot 0 = 3$, teda $D = 3$. Z toho vyplýva, že $C' = C$, a teda $C + C' = 2C = 4$ alebo $C + C' = 2C = 14$ (maximálny súčet dvoch jednociferných čísel je 18). To znamená, že $C = 2$ alebo $C = 7$.

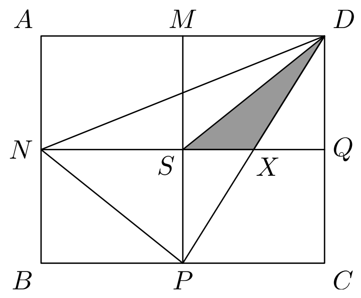
- Ak $C = 2$, tak nemáme žiaden prechod cez desiatku ani zaokrúhľovanie nahor, teda $B' = B$. Z toho vyplýva, že posledná cifra súčtu $B + B + B$ je 4, teda $B = 8$. To znamená, že máme zvyšok

2 a zaokrúhlime nahor, teda $A' = A + 1$, a súčet je $A + A + A + A + 1 + 2 = 4A + 3$. Pre najmenšie A je tento súčet aspoň 7 a nie požadovaných 5.

- Ak $C = 7$, tak máme prechod cez desiatku aj C zaokrúhlime nahor, teda $B' = B + 1$. To znamená, že 4 je posledná cifra súčtu $B + B + B + 1 + 1 = 3B + 2$. To platí len ak $B = 4$. Znovu máme len prechod cez desiatku, ale nezaokrúhľujeme, takže $A' = A$ a súčet stĺpca je $A + A + A + A + 1 = 4A + 1$. Tento súčet má byť 5, čomu vyhovuje len možnosť ak $A = 1$.

Hľadané číslo je 1473.

Úloha 13: Zolo má na kamión namaľovať novú reklamu podľa náčrtku. Pre zjednodušenie si do náčrtu dopísal označenie. Body M, N, P a Q sú stredy strán obdĺžnika $ABCD$. Ak má trojuholník SXD obsah 1 cm², aký obsah má trojuholník NPD?



Výsledok: 6 cm²

Riešenie: Obsah trojuholníka SXD vieme vyjadriť ako

$$S_{SXD} = \frac{|SX| \cdot |DQ|}{2} = 1\,\text{cm}^2.$$

Pozrime sa teraz na trojuholník NSD. Jeho strana NS je dvakrát väčšia ako SX a výšku má rovnakú ako trojuholník SXD, preto jeho obsah vieme zapísať ako

$$S_{NSD} = \frac{2|SX| \cdot |DQ|}{2} = 2\,\text{cm}^2.$$

Rovnako sa teraz pozrieme na trojuholník NPX, ktorého strana NX je pre zmenu trikrát väčšia ako SX a výška na túto stranu SP je opäť rovnako veľká ako DQ. Obsah trojuholníka NPX je teda

$$S_{NPX} = \frac{3|SX| \cdot |DQ|}{2} = 3\,\text{cm}^2.$$

Obsah celého trojuholníka NPD teraz dostaneme súčtom obsahov trojuholníkov SXD, NSD a NPX, čo je

$$1\,\text{cm}^2 + 2\,\text{cm}^2 + 3\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2.$$

Úloha 14: Hľadá sa kamionista s najmenším obvodom ramien. Obvod ramien je prirodzené číslo, ktoré končí dvojčíslom 24, je deliteľné 24 a ešte aj jeho ciferný súčet je 24. Aký obvod ramien má tento kamionista?

Výsledok: 19824

Riešenie: Uvedomme si, čo nám hovoria jednotlivé podmienky:

1. Ak má číslo končiť dvojčíslom 24, tak nám to určuje posledné dve cifry.
2. Ak má byť číslo deliteľné 24, tak musí byť deliteľné 8 a zároveň 3 (lebo $24 = 8 \cdot 3$), a teda posledné trojčíslie musí byť deliteľné 8 (kritérium pre deliteľnosť 8) a ciferný súčet musí byť deliteľný 3 (kritérium pre deliteľnosť 3). Keďže ciferný súčet má byť 24, tak bude určite deliteľný 3.

Posledné dvojčíslie je 24 a posledné trojčíslie má byť deliteľné 8. Ak tam skúsime dosadiť všetky cifry, tak nám budú vyhovovať len párne, teda posledné trojčíslie je jedno z 024, 224, 424, 624 a 824.
Teraz nám už treba iba doplniť tieto posledné trojčíslia tak, aby bol ciferný súčet výsledného čísla 24 a vybrať z nich to najmenšie.
Pridať len jednu cifru nestačí, nakoľko chýbajúci ciferný súčet je aspoň 10. Tento súčet vieme vytvoriť z minimálne dvoch cifier a najmenšie číslo, ktoré má ciferný súčet 10 je číslo 19. Hľadané číslo je teda 19824. Ak by sme chceli voliť iné posledné trojčíslie, potrebovali by sme ciferný súčet aspoň 12 a ten z dvoch cifier z ktorých je jedna cifra 1 nevieme vytvoriť.
Najmenšie také číslo je 19824.

Úloha 15: Kamionisti Arnold, Béďa, Csaba, Ďuri, Eugen, Ferdo, Gusto, Heňo a Iggy súťažili v pretekoch na 100 kilometrov. Koľko je možností, v akom poradí mohli skončiť, ak vieme, že Arnold skončil pred Béďom a tiež, že Csaba nebol prvý?

Výsledok: $161280 = \frac{8 \cdot 8!}{2}$

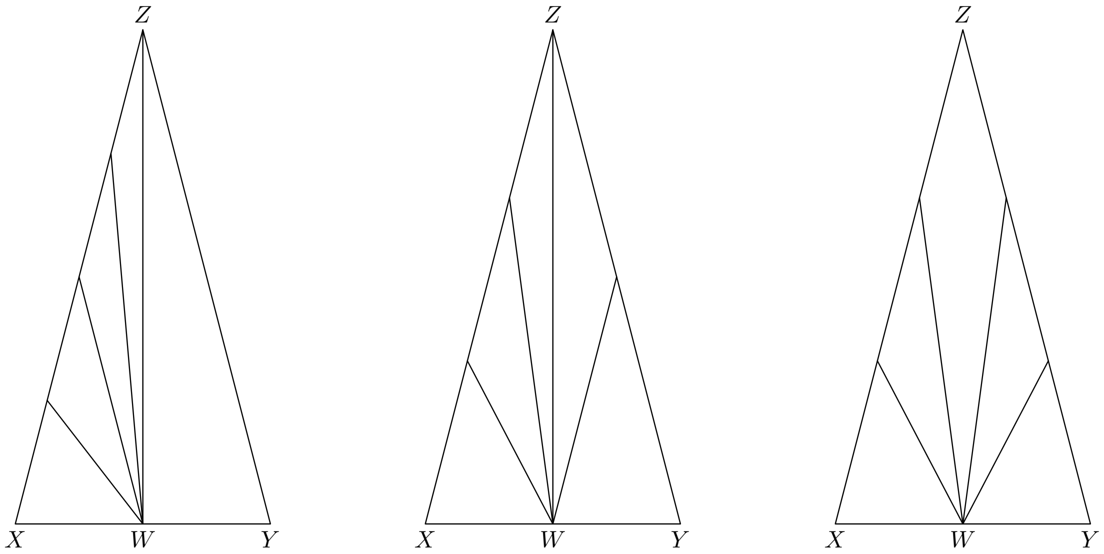
Riešenie: Najdôležitejšie, čo je potrebné uvedomiť si je, že možností, kedy Arnold skončil pred Béďom a naopak, kedy skončil za Béďom, je rovnako veľa. Preto celkový počet možností (bez toho, aby sme rozlišovali či dorazil Arnold alebo Béďa skôr) predelíme dvoma. A teraz koľko je tých možností.
Csaba nebol prvý, preto na prvé miesto máme 8 možností (všetci okrem Csabu), na druhé miesto môžeme dať všetkých okrem toho, čo skončil prvý (už aj Csabu), preto 8 možností, na tretie miesto všetkých okrem prvých dvoch, takže 7, a tak ďalej, až na predposledné miesto môžeme dať dvoch a na posledné už len toho, ktorý nám zvýšil. Tieto čísla medzi sebou vynásobíme, pretože s každým kamionistom na prvom mieste, môžeme zobrať každého z druhého miesta, atď. Teda celkový počet možností je $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 8! = 322560$. A to už len predelíme dvoma, aby sme zabezpečili, že Arnold skončil pred Béďom, teda

$$\frac{322560}{2} = 161280.$$

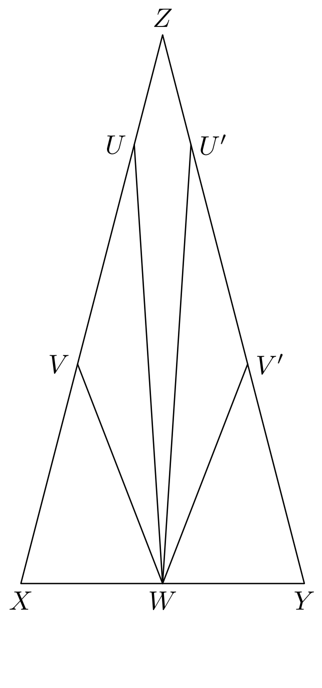
Úloha 16: Kamionista Laci zastavil na pumpe, kde mu pumpár Rolo doniesol sendvič v tvare rovnoramenného trojuholníka XYZ so základňou XY dlhou 5 centimetrov a ramenami dlhými 10 centimetrov. Bod W je stred základne XY. Prerežeme sendvič XYZ štyrmi rezmi prechádzajúcimi bodom W na päť častí s rovnakým obsahom. Koľko meria najdlhší z odrezaných úsekov na ramene trojuholníka XYZ?

Výsledok: 4 centimetre

Riešenie: V prvom rade si musíme uvedomiť, kam smerujú jednotlivé rezy -- koľko rezov pretne rameno XZ a koľko YZ.
Keby všetky štyri rezy pretli rovnaké rameno, tak by tam bola časť aspoň taká veľká, ako $1/2$ obsahu trojuholníka XYZ (obrázok vľavo), čo nemôže byť, keďže má ísť o päť obsahovo rovnakých častí.



Ak by jeden rez smeroval na jedno rameno a zvyšné tri na druhé, tak by sme tam mali časť s obsahom aspoň $1/4$ obsahu trojuholníka XYZ (obrázok v strede), čo tiež nevyhovuje, keďže to má byť $1/5$.
Preto idú dva rezy na jedno a dva rezy na druhé rameno (obrázok vpravo).



Náš trojuholník XYZ sa skladá zo štyroch trojuholníkov (XWV, VWU, YWV', $WV'U'$) a jedného štvoruholníka ($WU'ZU$). Všetky tieto útvary majú mať rovnaký obsah. Trojuholníky XWV a YWV', VWU a $V'WU'$ sú symetrické podľa osy základne XY, takže budú mať rovnaký obsah, ak body V a V', U a U' budú symetrické podľa tej osy.
Trojuholníky XWV a VWU majú mať rovnaký obsah -- majú rovnakú výšku prechádzajúcu bodom W, a preto musia mať aj rovnaké strany na tú výšku $|XV| = |VU|$. Rovnako platí na druhej strane (kvôli symetrii rovnoramenného trojuholníka) pre trojuholníky XWV' a $V'WU'$.
Tieto štyri trojuholníky ale musia mať aj rovnaký obsah ako štvoruholník $WUZU'$. Ten sa skladá z dvoch zhodných trojuholníkov (znova vďaka symetrii) WUZ a $WU'Z$. Obsah trojuholníka WUZ preto musí byť polovica obsahu trojuholníka WUV. Tieto dva trojuholníky majú znova rovnakú výšku (prechádzajúcu bodom W), preto $|UZ|$ musí byť polovičná oproti $|VU|$.
Takže rezy rozdelia XZ v pomere

$$|XV| : |VU| : |UZ| = 2 : 2 : 1.$$

Keďže $|XZ| = 10$ cm, tak najdlhší úsek bude mať $2/5$ z $|XZ|$, čo sú 4 cm.

Úloha 17: Kamionista Zolo si všimol, že počet kilometrov, ktoré má najazdený jeho kamión je štvorciferné číslo také, že prvá a druhá cifra sú rovnaké a tretia a štvrtá sú rovnaké. Toto číslo je druhou mocninou (to znamená, že sa dá napísať ako súčin dvoch rovnakých čísel). Koľko kilometrov má najazdený Zolov kamión?

Výsledok: $7744 = 88 \cdot 88$

Riešenie: Zolo najazdil nejakých $\overline{xxyy}$ kilometrov, kde x, y sú cifry, pričom $x \neq 0$, keďže má ísť o 4-ciferné číslo. Podľa dekadického zápisu môžeme písať

$$\overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y).$$

Číslo je deliteľné 11, a keďže má byť druhou mocninou, tak musíme v prvočíselnom rozklade nájsť ešte jednu 11, preto $100x + y$ musí byť deliteľné 11.
Prepíšeme to na tvar $100x + y = 99x + x + y$. Vidíme, že $99x$ je deliteľné 11, preto 11 musí deliť $x + y$. Tento súčet musí byť rovný 11, keďže x a y sú cifry a ich súčet môže byť najviac 18. Doplňme si to k dekadickému zápisu čísla $\overline{xxyy}$

$$\overline{xxyy} = 11(100x + y) = 11(99x + x + y) = 11(99x + 11) = 121(9x + 1).$$

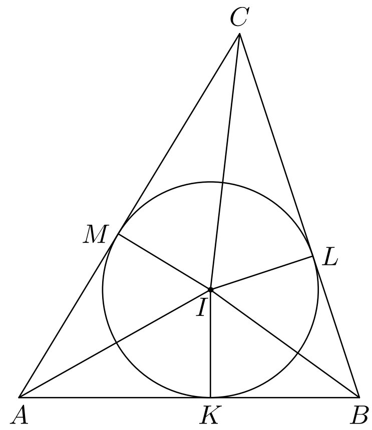
Číslo máme napísané ako súčin druhej mocniny (121) a čísla $9x+1$, čo musí byť tiež druhou mocninou, aby celkovo bolo číslo druhou mocninou. Vyskúšame 9 možností na číslo x (všetky cifry okrem 0) a zistíme, či niekedy dostaneme druhú mocninu. Iba pri čísle $x = 7$ dostávame $9 \cdot 7 + 1 = 64$, preto $x = 7$ vyhovuje a je jediné. K nemu $y = 11 - x = 4$.
Na tachometri je číslo $7744 = 88 \cdot 88$.

Úloha 18: Logo Rolovej pumpy je v tvare trojuholníka ABC so stranami $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 9$ cm a $|AC| = 10$ cm. Vpíšme doňho kružnicu a body dotyku označme postupne K, L a M na stranách AB, BC a AC. Čomu je rovné $|AK| + |BL| + |CM|$?

Výsledok: $27/2 = 13{,}5$ cm

Riešenie:
Označme I stred kružnice vpísanej do ABC. Dokážeme, že trojuholníky BIK a BIL sú zhodné (podľa usu).

- $|\sphericalangle IKB| = |\sphericalangle ILB| = 90^\circ$, pretože K, L sú body dotyku,
- $|\sphericalangle KBI| = |\sphericalangle LBI|$, pretože IB je os uhla KLB,
- stranu IB majú spoločnú.



Z tejto zhodnosti potom vyplýva $|BL| = |BK|$.
Analogicky dokážeme $|AK| = |AM|$ a $|CM| = |CL|$ zo zhodnosti dvojíc trojuholníkov AIK a AIM, respektíve CIM a CIL.
Spočítajme teraz obvod trojuholníka ABC s využitím týchto troch rovností:

$$|AB| + |BC| + |CA| = |AK| + |BK| + |BL| + |CL| + |CM| + |AM| = 2(|AK| + |BL| + |CM|).$$

Takže $|AK| + |BL| + |CM|$ tvorí polovicu obvodu trojuholníka, čo je

$$\frac{8 + 9 + 10}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \text{ cm}.$$

Úloha 19: Máme 3 kamióny s neobmedzeným skladovacím priestorom. Koľkými spôsobmi je možné prepraviť 78 škatúľ v týchto troch kamiónoch? (Záleží na poradí kamiónov.)

Výsledok: $\binom{80}{2} = \frac{80\cdot 79}{2} = 3160$

Riešenie: Predstavme si, že krabice sú uložené v rade za sebou a my máme poruke 2 úplne rovnaké tabuľky s nápisom „ďalší kamión". Tieto tabuľky umiestnime niekde do radu medzi krabice. Kľudne ich môžeme dať aj na začiatok aj hneď vedľa seba, proste hocijak. A potom naložíme kamióny. Začneme prvým od začiatku rady nakladať, až kým sa dostaneme k tabuľke „ďalší kamión". Potom prvý kamión zavrieme a začneme nakladať druhý tak, že pokračujeme v rade krabíc. Po druhej tabuľke zvyšok naložíme do tretieho. Počet spôsobov ako naložiť tieto kamióny je preto rovnaký ako počet uložení týchto 80 vecí (78 krabíc a 2 tabuliek) do rady. Tieto uloženia vieme spraviť tak, že najprv vyberieme 2 miesta v rade, kde budú tabuľky, a potom dáme krabice na všetky zvyšné miesta. Máme 80 možností kam dať prvú tabuľku a 79 možností kam dať druhú. Teraz sme však všetky možnosti zarátali dva krát, lebo je jedno, ktorá tabuľka je prvá a ktorá druhá. Takže výsledok je

$$\binom{80}{2} = \frac{80 \cdot 79}{2} = 3160.$$

Úloha 20: Všetci kamionisti sa stretli na združení dvojokých kamionistov a posadali si do pravidelného 69-uholníka. Zistite, koľkými spôsobmi vieme vybrať troch kamionistov tak, aby tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka.

Výsledok: $\binom{69}{2} - 46 = \frac{69\cdot 68}{2} - 46 = 2300$

Riešenie: Očíslujme vrcholy 69-uholníka od 1 po 69. Ku každej dvojici vrcholov A, B vieme vybrať práve jeden tretí tak, aby spolu tvorili rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Napríklad jediný rovnoramenný trojuholník so základňou vo vrcholoch $1, 50$ je trojuholník s vrcholmi $1, 50, 60$. Úsečka AB nám rozdelí 69-uholník na dva oblúky. Aby bol trojuholník rovnoramenný, potrebujeme vybrať ako tretí vrchol ten presne v strede oblúka. Keďže 69 je nepárne č??slo, na práve jednej strane od úsečky AB bude nepárny počet vrcholov. Na strane kde je párny počet vrcholov, v strede oblúka vrchol nie je (v uvedenom príklade pre úsečku $1, 50$ je stred toho dlhšieho oblúka medzi vrcholmi 25 a 26). Na oblúku s nepárnym počtom vrcholov je v strede jediný vrchol (stred kratšieho oblúka medzi 1 a 50 je 60). Takže každá dvojica vrcholov bude základňou v práve jednom rovnoramennom trojuholníku. Dvojicu vrcholov zo 69 vrcholov vyberieme

$$\binom{69}{2} = \frac{69 \cdot 68}{2}.$$

Číslo 69 je násobok 3, teda sa môže stať aj to, že vytvoríme rovnostranný trojuholník. Rôznych rovnostranných trojuholníkov v 69-uholníku je

$$\frac{69}{3} = 23.$$

Pri našom hľadaní rovnoramenných trojuholníkov ich zarátame trikrát, preto dve z troch zarátaní odpočítame.

Počet rovnoramenných trojuholníkov sa teda rovná počtu dvojíc vrcholov, mínus tých $2 \cdot 23 = 46$ rovnostranných trojuholníkov, ktoré sme zarátali naviac. To je

$$\binom{69}{2} - 46 = \frac{69 \cdot 68}{2} - 46 = 2300.$$

Hlavolam 1: Cudzinec v krajine, o ktorej vie, že jej obyvatelia buď vždy klamú alebo vždy hovoria pravdu, zabudol aký je deň, a tak sa opýtal štyroch ostrovanov aký je deň. Dostal tieto odpovede:
A: Včera bola streda.
B: Zajtra bude nedeľa.
C: Dnes je piatok.
D: Predvčerom bol štvrtok.
Ak by ste vedeli, koľko ľudí klame, tak by ste určite vedeli, aký je deň, ale to vám nepovieme. Aký deň v týždni teda je?

Výsledok: sobota

Riešenie: Keďže nevieme koľko ľudí klame, tak potom musíme prejsť všetky možnosti ako môžu obyvatelia klamať.

- Ak bude A hovoriť pravdu, tak je štvrtok, potom však B, C aj D musia klamať -- 3 klamú.
- Ak bude B hovoriť pravdu, tak je sobota, potom však A a C klamú a D hovorí pravdu -- 2 klamú.
- Ak bude C hovoriť pravdu, tak je piatok, potom A, B aj D klamú -- 3 klamú.
- Ak bude D hovoriť pravdu, tak je sobota, potom A a C klamú, B hovorí tiež pravdu -- 2 klamú.

Podľa zadania vieme, že ak by nám povedali, koľko ľudí klame, tak by sme si boli istý, aký deň v týždni je dnes. Keďže sme prešli všetky možnosti klamania, tak potom vieme, že iný počet klamárov ani nemôže nastať. Buď klamú dvaja alebo traja obyvatelia.
Ak by klamali traja, tak potom nevieme presne určiť, či je piatok alebo štvrtok, ale podľa zadania by sme to mali vedieť povedať určite, čiže traja nemohli klamať.
Ostalo nám, že klamali dvaja, a to v oboch prípadoch vychádza, že dnes je sobota.

Hlavolam 2: Z trištvrte tucta zápaliek urob tri tucty. Zápalky sa nesmú lámať a musíš ich použiť všetky.

Výsledok: $XXXVI = 36$ (tri tucty)

Riešenie: Najprv zistíme, koľko zápaliek vlastne máme k dispozícií. Vieme, že tucet je 12, takže trištvrte tucta bude $12 \cdot \frac{3}{4} = 9$ zápaliek. Z 9 zápaliek nevieme vytvoriť 36, tak skúsime 36 prepísať do rímskych čísel ($XXXVI$). Takýto zápis už vieme zostaviť z 9 zápaliek.

Hlavolam 3: Nájdi správne odpovede na všetky tri nasledovné otázky.
Otázka 1: Odpoveď na otázku číslo 2 je:
a) B
b) C
c) A
Otázka 2: Prvá otázka so správnou odpoveďou B je otázka číslo:
a) 3
b) 1
c) 2
Otázka 3: Jediná odpoveď, ktorú si ešte nevybral/a je:
a) A
b) B
c) C

Výsledok: c, a, b

Riešenie: Začneme druhou otázkou a prejdeme všetky možné odpovede na túto otázku:

- Ak odpovieme b), tak potom v prvej otázke by sme si museli vybrať možnosť b), ale podľa zadania prvej otázky sme museli na druhú otázku odpovedať a), čo je spor s naším predpokladom. Takže na druhú sme určite neodpovedali b).
- Ak odpovieme c), tak potom by sme práve v tejto otázke mali odpovedať b), čo je tiež spor, lebo sme odpovedali c).
- Z toho vyplýva, že sme museli odpovedať a).

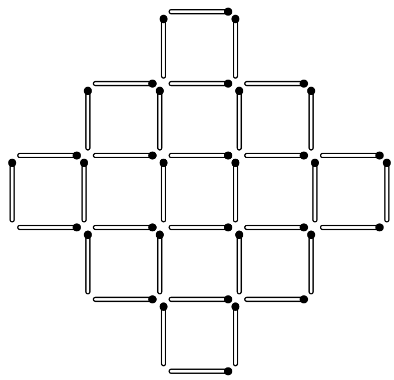
Ak odpovieme na druhú otázku a), tak potom na prvú musíme odpovedať c) (podľa zadania prvej otázky) a nakoniec na tretiu musíme odpovedať b). Po overení si všimneme, že iba toto riešenie platí.

Hlavolam 4: Superman už dlhšiu dobu trpí nespavosťou. Raz v noci sa zobudil a začal v duchu premýšľať: Ako dlho musím byť hore, aby som podľa gongu na kostolnej veži zistil, koľko je hodín? Aká je odpoveď na jeho otázku ak viete, že vežové hodiny odbíjajú celú hodinu vždy toľkokrát, koľko je práve hodín a polhodinu však odbíjajú len jedným úderom.

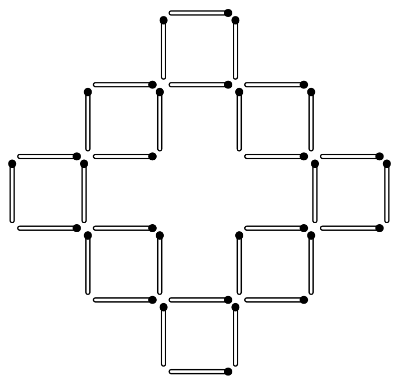
Výsledok: hodinu a pol

Riešenie: Počet úderov nám povie koľko je hodín (o deviatej je to deväť úderov). Takže ak sa Superman zobudí tesne po odbití nejakej cele hodiny, tak potom o hodinu už bude vedieť koľko je hodín podľa počtu odbití. Takže za hodinu by mal vedieť koľko je presne hodín. Lenže sa musíme pozrieť na jednu hodinu v noci. Pri tejto ak odbíja, nevieme povedať, či je to odbitie na polhodinu alebo o jednej v noci. Takže ak by sa Superman zobudil tesne po polnoci, tak potom ak prvýkrát odbije jedenkrát a potom o ďalšiu polhodinu zase raz, tak si nemôže byť istý, či je jedna hodina v noci alebo je už pol druhej v noci, takže musí počkať ešte jednu pol hodinu. Ak bude odbíjať raz, tak potom bude pol druhej alebo dvakrát, tak potom sú dve hodiny v noci. Takže v tomto prípade musí ostať hore až hodinu a pol, čo je najdlhšie.

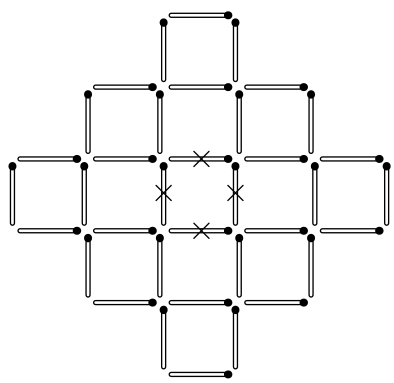
Hlavolam 5: Odoberte 4 zápalky tak, aby na obrázku ostalo iba 9 štvorcov:

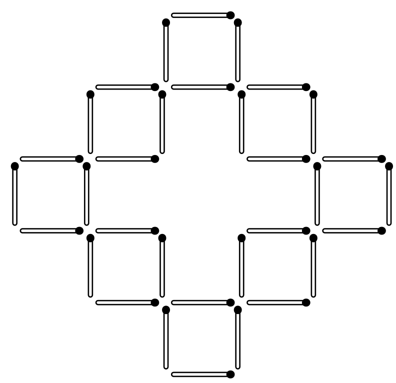


Výsledok:



Riešenie: Okrem malých štvorčekov 1×1 (je ich 13) sú v pôvodnom obrázku aj štvorce 2×2 (4) a dokonca aj 3×3 (1). Spolu 18 štvorcov. Našou úlohou je odobrať 4 zápalky tak, aby nám vzniklo práve 9 štvorcov.
Ak odoberieme všetky štyri vnútorné zápalky, tak potom sa počet štvorcov 1×1 zníži na 8. Štvorce 2×2 úplne zaniknú, lebo v každom bola časť strany zápalka, ktorú sme odobrali. A štvorec 3×3 nám ostane, lebo sme žiadnu zo zápaliek na strane neodobrali.





Hádanka 1: Čo pridáte do vedra plného vody, aby bolo ľahšie?

Výsledok: dieru

Hádanka 2: Štyri rožky, žiadne nôžky, domčekom to pohne.

Výsledok: slimák

Hádanka 3: Čo nemá hlavu a predsa má hrdlo?

Výsledok: fľaša

Hádanka 4: Nie je to v jačmeni, v krúpach to je, nie je to v obilí, v múke to je.

Výsledok: „ú“ alebo „k“

Hádanka 5: Koho treba biť, aby nás mohol veseliť?

Výsledok: bubon

Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2013 sa koná už 13. ročník tejto súťaže.
Súťaž trvá (čarovných) 66 minút. Súťažiaci zo základných škôl (7. - 9. ročník) a príslušných tried osemročných gymnázií (sekunda až kvarta) súťažia v štvorčlenných družstvách. Družstvá dostanú na začiatku 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Môžu ich riešiť v ľubovoľnom poradí, pričom získavajú:

- $+3$ body za odovzdanú a správne vyriešenú úlohu;
- $+1$ bod za odovzdaný a správne vyriešený hlavolam alebo hádanku;
- -1 bod za odovzdanú a nesprávne vyriešenú úlohu, hlavolam alebo hádanku;
- 0 bodov za neodovzdanú úlohu, hlavolam alebo hádanku.

Zadania starších ročnikov nájdete na http://matik.strom.sk/lomihlav.php

STROM

http://www.strom.sk
http://matik.strom.sk
http://matik.strom.sk/lomihlav.php

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY P. J. ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH • 1963 •

http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta
http://skoly.upjs.sk