Lomihlav

Košice 14. 11. 2014

Úloha 1: Homera chytila akútna túžba vedieť, koľko je hodín, no už zabudol, ako sa čítajú ručičkové hodiny. Vie len, že tretina času, ktorý uplynul od polnoci (keď šiel na večernú rabovačku chladničky), tvorí tretinu času, ktorý uplynie do poludnia (o takom čase pozerá Itchyho a Scratchyho). Koľko je hodín?

Výsledok: 6:00 (ráno)

Riešenie: Keďže tretina času, ktorý uplynul od polnoci, je rovnaká ako tretina času, ktorý uplynie do poludnia, tieto dva časy sú rovnaké. Od polnoci do poludnia uplynie 12 hodín. Tento čas rozdelíme na dve rovnaké časti, teda 6 a 6 hodín. Zistili sme, že od polnoci uplynulo 6 hodín a do poludnia uplynie rovnako 6 hodín. Teraz je teda 6:00.

Úloha 2: Lisa založila ekologický klub STROM, ktorý má stretnutia raz mesačne. Oznámenia o stretnutiach posiela členom dvakrát mesačne. Prvé posiela druhý štvrtok v mesiaci a druhé posiela druhý pondelok po prvom oznámení. V druhom oznámení je napísané: "stretnutie sa uskutoční najbližšiu sobotu." Kedy najskôr sa môže stretnutie uskutočniť, ak viete, že stretnutie sa môže uskutočniť len v mesiaci, v ktorom prišli už obe oznámenia? (Odpoveď je poradové číslo dňa v mesiaci.)

Výsledok: 24

Riešenie: Stretnutie sa v danom mesiaci uskutoční tým skôr, čím skôr bude v mesiaci druhý štvrtok. Druhý štvrtok v mesiaci môže byť najskôr $8.$ a to vtedy, ak bude prvý štvrtok zároveň prvým dňom v mesiaci. Prvý pondelok po druhom štvrtku bude teda najskôr 12. a druhý 19. Prvá sobota po tomto druhom pondelku potom bude 24.

Úloha 3: V kruhu okolo Nelsona, ktorého práve zatkli za verejné ponižovanie, stálo rovnomerne rozmiestnených niekoľko jeho obetí, ktoré sa mu teraz synchronizovane posmievali. Koľko obetí tam bolo, ak 17. obeť stála presne oproti 55.? *Presne oproti znamená, že sú presne oproti, teda cez Nelsona v strede na seba nevidia.*

Výsledok: 76 obetí

Riešenie: Keďže stoja tieto obete presne oproti sebe, počet obetí, ktoré sú medzi nimi je na oboch stranách rovnaký. Medzi 17. a 55. obeťou je $55 - 17 - 1 = 37$ obetí. V kruhu teda stojí dokopy $2 \cdot 37$ obetí medzi 17. a 55. a 2 vybrané oproti sebe stojace obete, teda 76 obetí.

Úloha 4: Na školskom vystúpení predstavil každý žiak nejaké číslo. Súčin čísel, ktoré predstavili Bart a Lisa, je 816. Keby jeden z nich predstavil číslo o 8 väčšie ako to, čo predstavil teraz, zväčší sa súčin ich čísel o 384. Aké je číslo, ktoré predstavila Lisa, ak vieme, že je menšie ako to, čo predstavil Bart?

Výsledok: 17

Riešenie: Pomenujme čísla x a y. Potom platí:

$$x \cdot y = 816.$$

Zapíšme súčin čísel, keď jedno z nich zväčšíme o 8 (bez ujmy na všeobecnosti zväčšíme x):

$$(x + 8) \cdot y = 816 + 384,$$

Roznásobíme, dosadíme 816 za $x \cdot y$, jednoducho upravíme:

$$\begin{aligned} x \cdot y + 8y &= 816 + 384, \\ 816 + 8y &= 816 + 384, \\ 8y &= 384, \\ y &= 48. \end{aligned}$$

Dosadíme do pôvodného vzťahu (náš súčin):

$$\begin{aligned} x \cdot 48 &= 816, \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Pôvodné čísla sú teda 17 a 48, 17 je menšie, teda ho predstavila Lisa.

Úloha 5: Bart a Milhouse si chcú dať turnaj v kopaní s ich spolužiakmi. Kopanie sa hrá v tímoch, no oni sa nijak raz nevedia rozdeliť do rovnako veľkých skupín. Zistili, že keby ich bolo o 3 viac, mohli by sa rozdeliť do 4 tímov. Keby ich bolo o 4 viac, vedeli by sa rozdeliť do 5 tímov a nakoniec, keby ich bolo o 5 viac, vedeli by sa rozdeliť do 6 tímov. Koľko najmenej spolužiakov musia mať, aby boli splnené tieto podmienky?

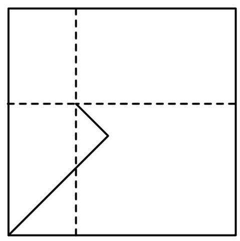
Výsledok: 59

Riešenie: Všimnime si, že zadanie „keby ich bolo o 3 viac, mohli by sa rozdeliť do 4 tímov“ vieme preformulovať na „keby ich bolo o 1 menej, mohli by sa rozdeliť do 4 tímov“. To platí preto, lebo každé štvrté číslo je deliteľné 4. Rovnako vieme upraviť aj ďalšie dve podmienky, teda „o 1 menej – 5 tímov“ a „o 1 menej – 6 tímov“. Z toho už lepšie vidieť, že hľadáme najmenšie číslo väčšie ako 1 deliteľné zároveň 4, 5 a 6 a potom pripočítame 1, aby číslo dávalo zvyšok 1 po delení 4, 5 a 6. Najmenší spoločný násobok čísel 4, 5 a 6 je rovný $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$, teda na turnaj v kopaní ich musí byť 61. Keďže sa pýtame, koľko najmenej *spolužiakov* musia mať Bart a Milhouse, tak odpoveď je $61 - 2 = 59$.

Úloha 6: Maggie sedí vo vrchole svojej postieľky tvaru štvorca so stranou dlhou 1 meter a veľmi sa nudí. Prelezie teda 62 centimetrov po uhlopriečke, otočí sa o 90 stupňov doľava, prelezie ešte 20 centimetrov a zostane tam. Na tomto mieste odmeria, koľko centimetrov je od každého zábradlia postieľky (jej postieľka má všetky 4 zábradlia – inak by bola už dávno preč) a namerané hodnoty sčíta. Aký dostane výsledok?

Výsledok: 200

Riešenie: Podstatné je uvedomiť si, že akonáhle sa Maggie vzdiali od jednej strany postieľky o x centimetrov (teda x sa priráta k vzdialenosti od tejto strany), presne x centimetrov sa priblíži k strane oproti (x sa odráta od vzdialenosti od opačnej strany). Súčet vzdialeností Maggie od opačných strán teda zostáva zachovaný a je rovný vzdialenosti opačných strán od seba. Tieto vzdialenosti sú v našom štvorci 100 centimetrov v oboch smerov, teda výsledok je $2 \cdot 100 = 200$.



Úloha 7: K Vočkovi prišla zásobovacia dodávka so 45 litrami piva v obrovskom sude. Vočko ho nemá kde uskladniť, a tak ho chce preliať do nádob. V sklade má neúrekom trojlitrových a šesťlitrových nádob. Koľkými spôsobmi to môže urobiť?

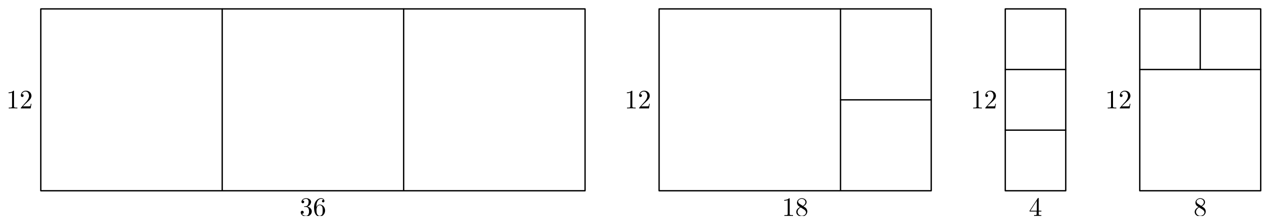
Výsledok: 8

Riešenie: Ak by mal Vočko rozdeliť celý sud piva do najmenších, trojlitrových, nádob, potreboval by ich 15 ($45/3 = 15$). Keďže použil najmenšie možné nádoby, tak najväčší možný počet použitých nádob je 15. Druhý druh nádob je šesťlitrový, takáto nádoba nahradí práve dvojicu trojlitrových nádob. Takých dvojíc je tam 7 ($15/2 = 7$, zvyšok 1), a teda Vočko môže nahradiť 1 až 7 dvojíc. To je 7 možností, pripočítajme ešte tú, kedy nepoužije ani jednu šesťlitrovú ($7 + 1 = 8$). Vočko má 8 možností, ako uskladniť veľký sud piva.

Úloha 8: Komixák má novú zbierku minikomixov tvaru obdĺžnika, ktoré majú jednu stranu dlhú 12 centimetrov a dajú sa rozdeliť na 3 štvorce. Nájdite všetky možné dĺžky (v centimetroch), ktoré môže mať druhá strana obdĺžnikového minikomixu.

Výsledok: 4, 36, 8, 18

Riešenie: Zrejmé je, že ak od troch štvorcov chceme, aby úplne vypĺňali obdĺžnik, musia to byť buď tri zhodné štvorce alebo dva zhodné štvorce a jeden väčší štvorec. Keďže o obdĺžniku vieme, že jedna jeho strana je 12 a strany v obdĺžniku nemusia byť zhodné, pozrime sa tiež na dva prípady. Ak 12 je tá menšia strana a ak 12 je tá väčšia strana. Ak je to tá menšia, tak najväčší možný štvorec, ktorý tam môže byť je so stranou 12. A ako sme už napísali, sú tu dve možnosti. Ak to budú tri rovnaké štvorce so stranou 12 (obr. 1) alebo jeden veľký so stranou 12 a dva menšie, teda so stranou 6 (obr. 2). Vtedy bude druhá strana obdĺžnika mať dĺžku 36 alebo 12. Ak je to tá väčšia a všetky štvorce rovnaké so stranou 4 ($12/3 = 4$), obdĺžnik bude mať druhú stranu dĺžky 4 (obr. 3). Poslednou možnosťou je, ak tam bude opäť jeden veľký štvorec, označme jeho stranu x a dva malé, označme ich stranu y. Podľa obrázku (obr. 4) môžeme povedať, že $x + y = 12$ a zároveň $y + y = x$. Tak si za x dosadíme $2y$ a dostaneme rovnicu $3y = 12$ z čoho vyplýva, že $y = 4$ a potom $x = 8$. V tomto prípade je dĺžka druhej strany obdĺžnika 8.



obr.1 obr.2 obr.3 obr.4

Úloha 9: Milhouse mal jeden večer voľný byt, lebo jeho rodičia išli na rande do atómovej elektrárne, a tak si vypísal všetky 5-ciferné čísla také, pre ktoré platí, že každá cifra je väčšia ako súčet cifier, ktoré stoja napravo od nej. Aký je súčet čísel, ktoré si Milhouse vypísal?

Výsledok: 273630

Riešenie: Označme naše číslo $\overline{edcba}$. Cifra na mieste jednotiek bude a. Druhé číslo bude väčšie ako prvé, a teda bude aspoň $a + 1$. Tretie bude väčšie ako súčet prvého a druhého, a teda bude aspoň $2a + 2$. Analogicky vieme, že posledná cifra bude aspoň $8a + 8$, a keďže je to cifra (musí byť menšia ako 9), tak musí byť $a = 0$. Vieme, že posledná cifra je 0. Označme si predposlednú cifru b. Analogicky posledná cifra bude najmenej $4b + 4$, ktorá musí byť menej ako 9 a tiež $b > 0$, preto $b = 1$. Rovnako vieme aj pre tretiu cifru $c > 1$ povedať $2c + 3 < 9$, čomu vyhovuje jediné $c = 2$. Posledná cifra teda musí byť väčšia ako $d + 3$, pričom $d > 3$. Pre d máme dve možnosti, a to 4 alebo 5. Pre 5 bude e jednoznačne 9 a pre 4 máme dve možnosti 8 a 9. Čísla, ktoré si napísal, sú teda 84210, 94210, 95210 a ich súčet je 273630.

Úloha 10: Edna narysovala Skinnerovi na narodeniny trojuholník ABC, ktorého dĺžky strán boli celé čísla a $|AB| = 8$. Keď mu povedala dĺžku strany BC, vedel aj dĺžku strany AC. Aký je obvod Skinnerovho darčeka?

Výsledok: 17

Riešenie: Z trojuholníkovej nerovnosti vieme povedať, že:

$$|BC| + |AC| > |AB| \text{ a } |AB| + |AC| > |BC|,$$

pričom $|AB| = 8$. Prvú rovnicu upravím na tvar: $|BC| > 8 - |AC|$. Nerovnice vieme spojiť do jednej: $8+|AC| > |BC| > 8-|AC|$. Môžeme si všimnúť, že s narastajúcim $|AC|$ sa zväčšuje aj počet možností, čomu môže byť rovné $|BC|$. Budú to všetky prirodzené čísla medzi $8 - |AC|$ a $8 + |AC|$. Musíme nájsť teda také $|AC|$, aby sa medzi týmito číslami nachádzalo iba jedno prirodzené číslo. Rozdiel medzi týmito dvoma číslami preto musí byť 3, a teda $|AC| = 1$ a $|BC| = 8$. Obvod bude rovný 17.

Úloha 11: Homer sa potkol, a tak si zanadával: „Doh!“ Koľko je $\overline{DOH}$, ak nahradíme písmená číslicami tak, aby bol súčet správny? (Rovnaké písmená znamenajú rovnaké číslice, rôzne písmená rôzne číslice.)

$$\begin{array}{rr} & HDO \\ + & HOD \\ \hline & DOH \end{array}$$

Výsledok: 954

Riešenie: Najprv si všimnime, že keď sčítame $O + D$ na mieste jednotiek, tak dostaneme H. Ak však sčítame $O + D$ na mieste desiatok, dostaneme O. Jediná možnosť ako sa to môže stať je, že $O + D$ je viac ako 10 a teda prenášame „zvyšok“. To znamená, že H je menšie od O o to, čo prenášame. Keďže O a D sú cifry, tak ich súčet je najviac 18, a teda „zvyšok“, čo sme preniesli musí byť 1. Z toho vyplýva, že $O = H+1$. Teraz vieme, že $O+D = (H+1)+D = 10+H$, čiže $D = 9$. Vieme, že $H+H+1 = D = 9$ ($+1$ preto, lebo $D + O$ dáva „zvyšok“ 1), to znamená, že $H = 4$. Ľahko potom dopočítame, že $O = 5$ a dostávame sa tak k riešeniu $\overline{DOH} = 954$.

Úloha 12: Dedo Abe má narodeniny, no už mu nie je 65 ako za mlada, že by si pamätal, koľko rokov to už kráča po tomto svete. V domove dôchodcov sa cíti perfektne, lebo sa nemusí každé ráno pozerať na svoje nepodarené dieťa a ľstivé vnúčence. V onú narodeninovú noc sa mu sníval príšerný sen, že takých detí, ako je jeho Homer, splodil rovno niekoľko, a každé z nich má toľko detí, koľko má samo súrodencov. Pri raňajkách, keď sa upokojil, mu sestričky popriali veľa zdravia, aby sa dožil aj stovky a priniesli mu tortu. Sviečky na jeho osláveneckej torte, ktorých bolo presne toľko, koľko má rokov, mu však pripomenuli nočnú moru, pretože ich počet bol rovnaký, ako počet jeho detí a vnúčat v tom sne, a tak ju odmietol zjesť. Koľko rokov slávi Abe?

Výsledok: 81

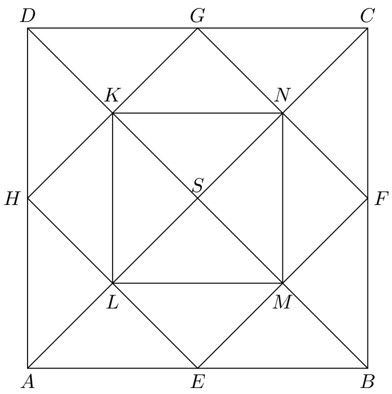
Riešenie: Označme počet Abeho detí ako D. Každé z jeho detí malo toľko detí, koľko má samo súrodencov, čo znamená, že každé z nich malo $D - 1$ detí. Dedo Abe má teda $D \cdot (D - 1)$ vnúčat. Dedo Abe má toľko rokov, koľko detí a vnúčat dokopy, čo znamená, že má $D + D \cdot (D - 1)$ rokov.

$$D + D \cdot (D - 1) = D + D \cdot D - D = D \cdot D$$

Teraz vieme, že keď vynásobíme prirodzené číslo samo sebou, tak dostaneme jeho vek. To nám avšak nestačí. Musíme využiť informáciu, že má viac ako 65 a menej ako 100 rokov. Po chvíľke skúšania zistíme, že jediné také číslo je $9 \cdot 9$. Dedo Abe má 81 rokov.

Úloha 13: Keď sa Barney prebudil do sparného júlového rána a všimol si, že leží pri kontajneri s plastmi, vôbec ho to neprekvapilo. Z jeho pondelkovej rutiny ho vytrhlo až zistenie, že na etikete fľašky, ktorá mu slúžila ako vankúš, je prilepené zadanie príkladu: Body E, F, G, H sú stredmi strán štvorca $ABCD$, ktorého obvod je 96. Body K, L, M, N sú stredmi strán štvorca $EFGH$. Vypočítajte obsah štvorca $KLMN$.

Výsledok: 144



Riešenie: Štvorec $ABCD$ má obvod 96, takže má stranu dĺžky 24. Nech body E, F, H sú na stranách AB, BC, AD a body K, N na stranách EF a EH. Dokreslíme si ešte uhlopriečky štvorca $ABCD$ a jeho stred S. Zrejme bod S je stredom všetkých troch štvorcov, navyše ľahko vidno, že $SEBF$ je štvorec so stredom K. Teda K je stredom SB, podobne N je stredom SA. Strana KL je potom strednou priečkou ASB a jej dĺžka je polovica dĺžky AB, čiže 12. Obsah $KLMN$ je potom $12 \cdot 12 = 124$.

Úloha 14: Ralphovi sa stratil kamarát. Keďže deti si ho nevšímali a zvieratiek sa bál, kamarátil sa s číselkami, čo ale obnášalo priveľkú zodpovednosť, pretože tie nie sú veľmi samostatné. Najhoršie to je s malými číslami, pretože keď sa stratia tie, z diaľky ich nevidno. Dnes sa mu stratilo jedno z jeho obľúbených – deliteľné 48, s ciferným súčtom 48, končiace dvojčíslom 48. No a samozrejme, to najmenšie z takých čísel, aby mal najťažšiu prácu. Aké číslo sa mu stratilo?

Výsledok: 2998848

Riešenie: Deliteľnosť 48 je to isté ako deliteľnosť 16 a 3 zároveň. Keďže číslo má ciferný súčet 48, čo je deliteľné 3, tak je určite deliteľné 3. Preto stačí overovať deliteľnosť 16. Tá závisí od posledných 4 cifier (podobne ako deliteľnosť 2 od poslednej cifry, 4 od posledných dvoch cifier, ...). Posledné dve sú dané, ďalšie dve chceme čo najväčšie, aby ďalšie cifry pred nimi mohli byť čo najmenšie. Čísla 9948, 8948 ani 9848 nie sú deliteľné 16, ale 8848 už áno. Zostáva nám ciferný súčet 20 na zvyšné cifry. Najmenšie číslo s ciferným súčtom 20 je 299, tak ho tam doplníme. Dostávame 2998848.

Úloha 15: V Springfielde sa za celý deň nič nedialo, a tak si Kent Brockman v správach zaimprovizoval namiesto reportáže telefonickú hru. Diváci mali zistiť, aké číslo má jeho meno ak vedia, že:

$$\begin{array}{rl} 6152 & +0 \\ 4182 & 00 \\ 5314 & 00 \\ 5789 & + \\ KENT & ++++ \end{array}$$

- znak 0 predstavuje uhádnuté číslo v riadku,
- znak $+$ predstavuje uhádnuté číslo v riadku, ktoré je zároveň na správnom mieste,
- používame cifry od 1 do 9,
- každé písmeno jeho mena reprezentuje inú cifru.

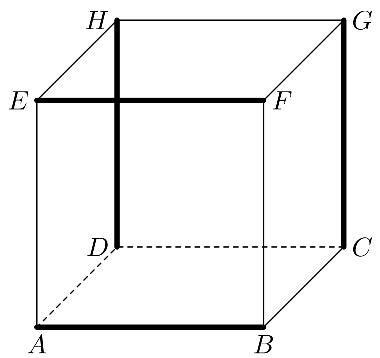
Výsledok: 6741

Riešenie: Informácie o čísle budeme označovať zaradom 1., 2., 3. a 4. Z posledných dvoch vidno, že 5 v čísle nie je (ak by totiž bolo, tak podľa 4. je na správnom mieste a podľa 3. nie je). Potom ak zabudneme na 5ky, z pokusov 1., 3. a 4. vidno, že dve z číslic 1, 2, 6, dve z číslic 1, 3, 4 a jedna z číslic 7, 8, 9 sa nachádzajú vo finálnom čísle. Ak by 1 nebola v čísle, tak tam musia byť 2 a 6 podľa 1., čísla 3 a 4 podľa 3. a ešte jedno z čísel 7, 8, 9. To by už bolo príli?? veľa, takže číslo 1 musí byť niekde v správnom čísle. Z 1. a 2. potom vidno, že 2 v čísle nie je (lebo ak by bolo, tak v oboch sú 1, 2 na rovnakých miestach, ale v jednom čísle by bolo jedno z nich na správnom mieste a v druhom nie). Z 1. potom nutne 6 musí byť v čísle a z 1. a 2. vidno, že 6 musí byť K (totiž podľa 1. je 1 alebo 6 na správnom mieste, ale 1 je na rovnakom mieste aj v 2., no v tomto pokuse nie je nič na správnom mieste). Z 2. a 3. potom vidno, že 1 musí by?? T, lebo K už je obsadené 6tkou a v 2. a 3. nie sú žiadne $+$, takže 1 nie je správne ani na druhom ani na treťom mieste, takže je na štvrtom, čo je T. Potom z 2. vieme, že ešte 4 alebo 8 je vo výslednom čísle, ale zo 4. vidno, že 8 to nemôže byť (lebo je na rovnakom mieste v oboch, a ak by 8 bolo v čísle, tak v 4. je na správnom mieste a v 2. nie, čo nemôže). Teda 4 je v čísle a 8 nie. Z 4. potom vidíme, že buď $E = 7$ alebo $T = 9$, lenže už vieme, že $T = 1$, čiže musí byť $E = 9$. Zostali nám vo výslednom čísle ešte 4 a N, teda $N = 4$. Keď to zhrnieme, máme $KENT = 6741$.

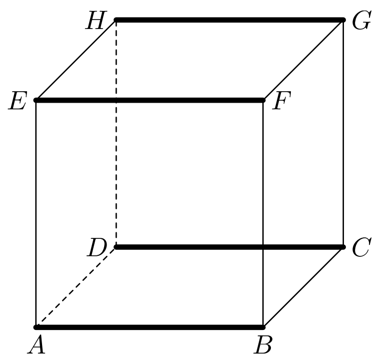
Úloha 16: Smithers dostal za úlohu postaviť nový jadrový reaktor v tvare kocky, aby sa zmestil pánovi Burnsovi do obývačky. Tento reaktor má každú stenu inej farby, avšak hrany má nenamaľované. Burns má vycibrený vkus a chce, aby boli práve 4 hrany reaktora ofarbené zelenou farbou, aby mu ladil ku gauču a zvyšných 8 hrán hnedou, aby tam nezostala žiadna neofarbená hrana (veď musí byť nóbl). Zároveň ale žiadna dvojica zelených hrán nesmie mať spoločný vrchol. Koľko má teraz možností ako ofarbiť reaktor (všetkých 12 hrán), ak chce uspokojiť požiadavky pána Burnsa?

Výsledok: 9

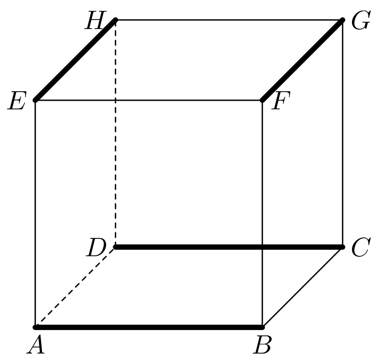
Riešenie: Označme si kocku $ABCDEFGH$. Keďže máme 8 vrcholov a 4 zelené hrany, ktoré majú 8 koncov, tak z každého vrcholu musí vychádzať práve 1 zelená hrana. Zafarbíme (na zeleno) nejakú hranu z vrcholu A, napríklad AB. Ak z vrcholu D zafarbíme hranu DH, zvyšok ja jasne daný (zelené sú ešte CG a EF) – obr.1. Ak zafarbíme CD, máme ešte 2 možnosti (obr.2 a obr.3), teda spolu 3 možnosti. V prípade, že by sme z vrcholu A zafarbili inú hranu bude to len symetrické, to znamená, že zase budeme mať 3 možnosti. Keďže z vrcholu A vedú 3 hrany, spolu to je $3 \cdot 3 = 9$ možností.



obr.1



obr.2



obr.3

Úloha 17: Šerif Wiggum si vypísal všetky 2-ciferné čísla a pre každé z nich spočítal súčin jeho číslic. Všetky súčiny potom sčítal. Pri týchto operáciách sa ale šesťkrát pomýlil a dvakrát zabudol, čo mal počítať, takže mu vyšlo číslo 47. O koľko sa šerif pomýlil?

Výsledok: 1978

Riešenie: My (teda šerif) potrebujeme spočítať $1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 0 + \cdots + 9 \cdot 9 = (1 + 2 + \cdots + 9)(0 + 1 + \cdots + 9)$. To, že sa to rovná si ľahko overíte, keď roznásobíte tie 2 zátvorky :) Teraz to už nie je žiaden problém dopočítať:

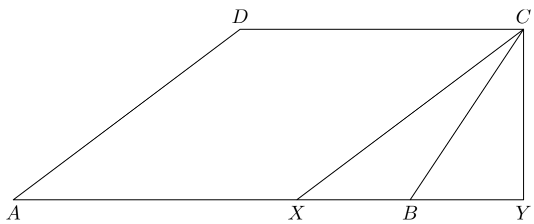
$$(1 + 2 + \cdots + 9)(0 + 1 + \cdots + 9) = 45 \cdot 45 = 2025.$$

Šerif sa pomýlil o $2025 - 47 = 1978$.

Úloha 18: Nelson ukradol Martinovi zošit z prvouky. Mal na ňom nakreslený lichobežník. Nelson neváhal a na základni AB lichobežníka $ABCD$ si zvolil bod X tak, že $AXCD$ bol kosoštvorec so stranou 5 a výškou 3 (lichobežník bol na takúto operáciu ako stvorený). Aká dlhá je strana BC Martinovho pôvodného lichobežníka, ak pomer veľkosti obsahu kosoštvorca $AXCD$ a veľkosti obsahu zvyšku lichobežníka je $5 : 1$? Odpoveď nezaokrúhľujte.

Výsledok: $\sqrt{13}$

Riešenie: Obsah kosoštvorca $AXCD$ je $5 \cdot 3 = 15$. Preto obsah zvyšku, ktorým je trojuholník XBC je $15/5 = 3$. Obsah XBC je však aj $\frac{3 \cdot |BX|}{2}$, z čoho ľahko dopočítame $|BX| = 2$. Nech Y je päta kolmice z bodu C na priamku AB. Keďže $|CY| = 3$ a $|CX| = 5$, tak z Pytagorovej vety máme $|XY| = 4$. Preto $|BY| = 2$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník BYC máme $|BC| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.



Úloha 19: Marge má podozrenie, že jej niekto popísal kuchynskú linku postupnosťou prirodzených čísel, ktorej prvý člen, napísaný priamo na sporáku, je 432 a každý ďalší člen je súčtom druhých mocnín cifier predchádzajúceho členu. Predtým, než si to overí na vlastné oči, musí sa psychicky pripraviť na to, čo je napísané na rúčke šuflíka s príborníkom. Aké číslo to je, ak si Marge vymerala, že bude $2014.$ v poradí? *Druhá mocnina cifry je súčin cifry so samou sebou, teda druhá mocnina x je číslo $x \cdot x$.*

Výsledok: 42

Riešenie: Budeme si písať postupne nasledujúce členy: 432, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, atď. Tu už vidíme, že sa nám to začína opakovať (keď raz dosiahneme rovnaké číslo, tak už určite aj nasledujúce členy budú rovnaké, keďže to robíme rovnakým postupom a nezáleží na tom, ktoré číslo v poradí to je). Opakovať sa bude stále osmica čísel. Ktoré z nich bude to 2014. v poradí? Najprv sú 3 čísla (432, 29 a 85), potom sa 251-krát zopakuje tá osmica ($251 \cdot 8 = 2008$). Dostaneme sa tak na 2011. číslo v poradí. A tretie z našej opakujúcej sa osmice je teda to 2014. v poradí, teda číslo 42.

Úloha 20: Homer si kúpil $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 2014 \cdot 2014$ koblíh. Počas prvej šichty $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + 2013 \cdot 2015$ z nich zjedol. Koľko koblíh ostalo Homerovi?

Výsledok: 2014

Riešenie: Našou úlohou je vlastne odčítať dve čísla zo zadania, teda vyčísliť

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 2014 \cdot 2014 - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + 2013 \cdot 2015) =$$
$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 2014 \cdot 2014 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - \cdots - 2013 \cdot 2015).$$

Hlavnou pointou tohto riešenia bude len preusporiadať členy, a to takto:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + \cdots + 2014 \cdot 2014 - 2013 \cdot 2015.$$

A teraz ich budeme odčítavať vždy po dvojiciach (prvý člen nemá dvojicu):

$$\begin{gathered} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1, \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1, \\ \vdots \\ 2014 \cdot 2014 - 2013 \cdot 2015 = 1. \end{gathered}$$

To všeobecne platí, pretože $n \cdot n - (n-1) \cdot (n+1) = n \cdot n - (n \cdot n - 1) = 1$. Tak a teraz týchto 2013 nových členov sčítame a dostaneme 2013. K tomu už len pripočítať prvý člen $1 \cdot 1$ a výsledok 2014 je na svete.

Hádanka 1: Šesť nôh má a po hlave chodí.

Výsledok: voš

Hádanka 2: Čo môžeš chytiť, ale nemôžeš to hodiť?

Výsledok: chorobu

Hádanka 3: Kto sedáva na chrbte?

Výsledok: jazdec (na koni)

Hádanka 4: Má len jednu nohu, ale veľa kolien.

Výsledok: steblo

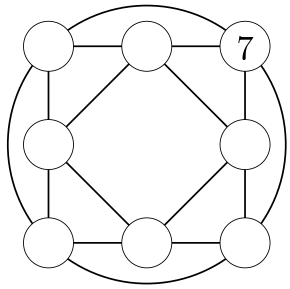
Hádanka 5: Čo obletí celý svet a aj tak zostane v rohu?

Výsledok: poštová známka prilepená na obálke

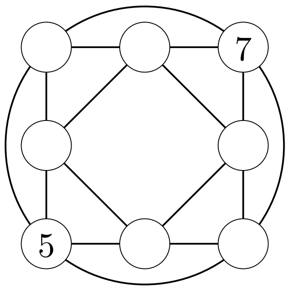
Hlavolam 1: Doplňte nasledujúci člen tejto postupnosti $M31$, $J30$, $J31$, $A31$, ...

Riešenie: Nasledujúci člen je $S30$. Stačí si všimnúť nápadné čísla 30 a 31, ktoré popisujú počet dní v mesiacoch a už len napasovať správnu postupnosť mesiacov k nim. Dva krát 31 dní v dvoch mesiacoch za sebou je v mesiacoch júl a august, preto nasledujúci člen bude september, ktorý má 30 dní, teda $S30$.

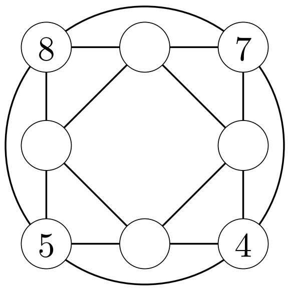
Hlavolam 2: Doplňte do obrázku všetky prirodzené čísla od 1 po 8 tak, aby súčet čísel vo vrcholoch menšieho štvorca aj vo všetkých štyroch trojuholníkoch bol 12 a na obvode kružnice bol súčet 24.



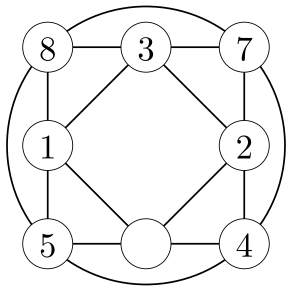
Riešenie: Keď sa pozrieme na trojuholník obsahujúci číslo 7, tak súčet zvyšných dvoch čísel je 5. Tie sú súčasťou štvorca – zvyšné dve čísla štvorca preto majú súčet $12 - 5 = 7$. Tie sú súčasťou trojuholníka, a preto jeho tretie číslo je $12 - 7 = 5$ (obr.1). Kde môže byť číslo 8? Nemôže byť v trojuholníku s číslom 5 ani 7, pretože súčet by bol väčší ako 12, preto musí byť na kružnici (je jedno, ktoré z dvoch čísel to bude). Posledné chýbajúce číslo z kružnice potom musí byť $24 - 7 - 5 - 8 = 4$ (obr.2). V trojuholníku s číslom 8 musia byť čísla 1 a 3 (súčet 4 pomocou rôznych čísel inak nedostaneme). V trojuholníku s číslom 7 musia byť čísla 2 a 3 (1 a 4 nevyhovuje, lebo číslo 4 je už použité inde). Preto medzi číslami 7 a 8 je spoločné číslo tých dvoch trojuholníkov, teda číslo 3 (obr.3). Posledné číslo 6 doplníme na zostávajúce miesto (obr.4).



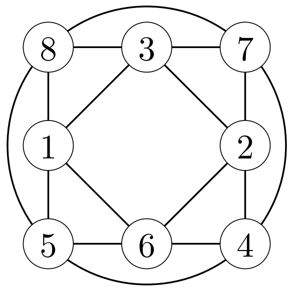
obr.1



obr.2

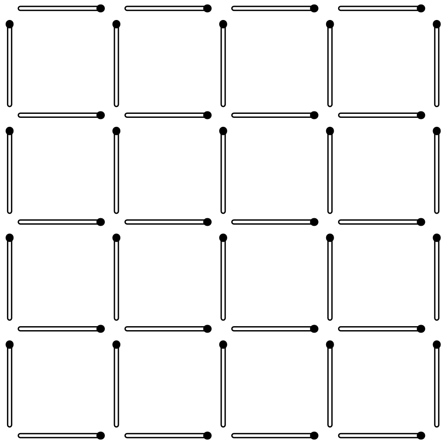


obr.3

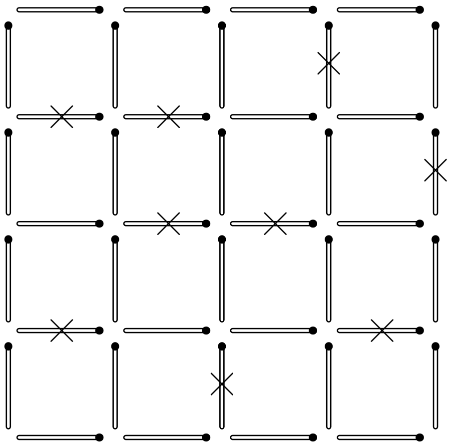


obr.4

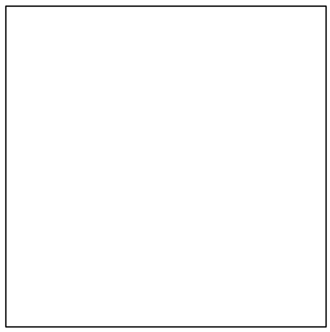
Hlavolam 3: Zo 40 zápaliek je zostavený štvorec 4×4 zápalky. Obrazec obsahuje taktiež menšie štvorce o rozmeroch 3×3, 2×2 a 1×1. Cieľom je odobrať 9 zápaliek tak, aby nezostal ani jeden štvorec žiadnej veľkosti.



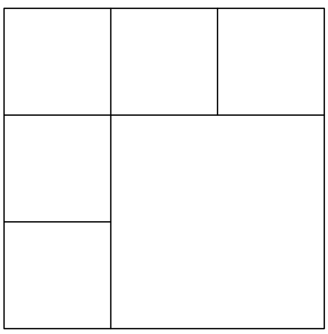
Riešenie:



Hlavolam 4: Rozdeľte štvorec na obrázku na 6 menších štvorcov.

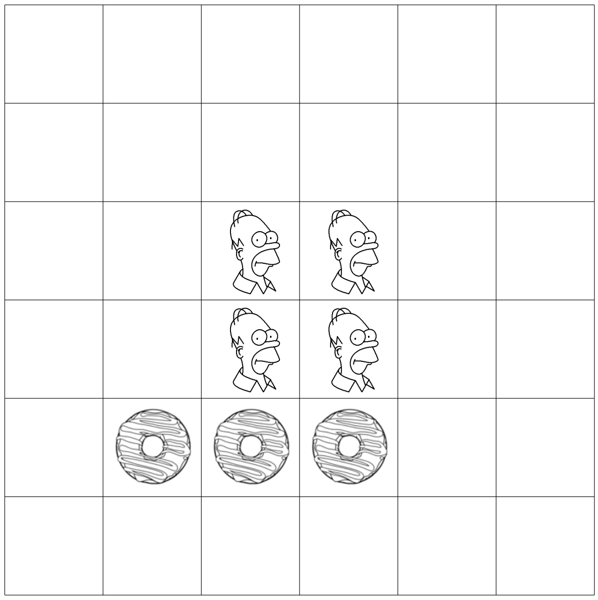


Riešenie:

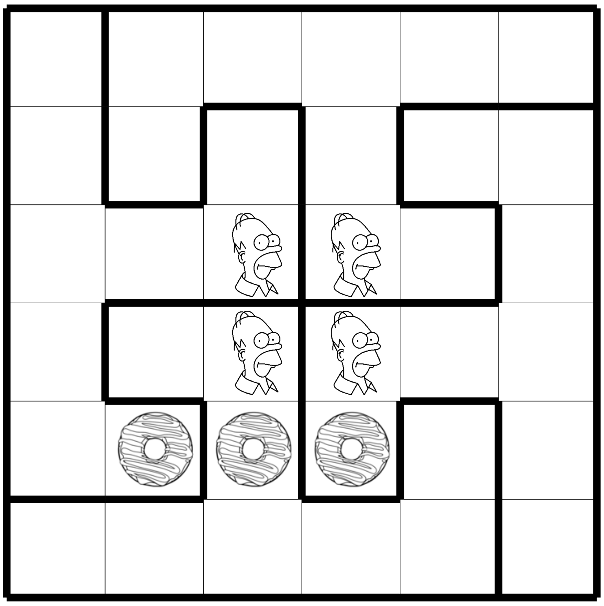


Ak štvorec rozdelíme na $3 \times 3 = 9$ štvorčekov a zo štyroch malých štvorčekov (ostane 5 malých štvorčekov) spravíme veľký (odstránime teda 4 štvorčeky a pridáme 1), dostaneme ich práve $5 + 1 = 6$.

Hlavolam 5: Rozrežte štvorec na 4 rovnaké časti, pričom v každej časti musí byť jeden Homer so svojou koblihou. Jednému Homerovi sa kobliha neujde, ten bude nadávať na svoje zvyšné hlavy. Rezať môžete len po čiarach.



Riešenie:



Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2014 sa koná už 14. ročník tejto súťaže.

Súťaž trvá (čarovných) 66 minút. Súťažiaci zo základných škôl (7. - 9. ročník) a príslušných tried osemročných gymnázií (sekunda až kvarta) súťažia v štvorčlenných družstvách. Družstvá dostanú na začiatku 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Môžu ich riešiť v ľubovoľnom poradí, pričom získavajú:

$+3$ body za odovzdanú a správne vyriešenú úlohu;

$+1$ bod za odovzdaný a správne vyriešený hlavolam alebo hádanku;

-1 bod za odovzdanú a nesprávne vyriešenú úlohu, hlavolam alebo hádanku;

0 bodov za neodovzdanú úlohu, hlavolam alebo hádanku.

Zadania starších ročnikov nájdete na *http://matik.strom.sk/lomihlav.php*

STROM

http://www.strom.sk
http://matik.strom.sk
http://matik.strom.sk/lomihlav.php

http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta
http://skoly.upjs.sk

Projekt podporila Nadácia pre deti Slovenska z fondu Hodina deťom

hodina deťom

NADÁCIA PRE DETI SLOVENSKA
CHILDREN OF SLOVAKIA FOUNDATION