Lomihlav

Košice 27. 11. 2015

Úloha 1: Traja vedúckovia spolu čakali na obed na trolejbus. Keďže sa začali nudiť, tak najstarší Robčo šiel v smere trolejbusu a potom naňho nasadol, stredný Matúš šiel trolejbusu naproti, kde naňho taktiež nastúpil a najmladší Peťo počkal na tento trolejbus na zastávke. Kto z nich sa dostal na intrák najskôr?

Výsledok: všetci rovnako

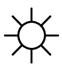
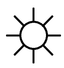
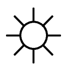
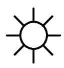
Riešenie: Je potrebné si uvedomiť, že nastupovali do toho istého trolejbusu, a teda v ňom aj naraz v jednu chvíľu spolu cestovali. Na intrák preto prišli všetci vedúci spolu -- rovnako.

Úloha 2: Na MATIKovskom ostrove je neobyčajné počasie. V utorok a štvrtok vždy prší, v nedeľu je hmla a ostatné dni svieti slniečko. MATIKovskí vedúci sa rozhodli urobiť 44-dňový tábor. Ktorý deň majú začať, aby mali čo najviac slnečných dní?

Výsledok: piatok

Riešenie:

Pre názornosť zapíšme ako vyzerajú jednotlivé dni.

Pondelok	Utorok	Streda	Štvrtok	Piatok	Sobota	Nedeľa
						

Nezávisle od toho, ktorý deň vyberieme, počas tábora uplynie celých 6 týždňov (42 dní, v ktorých sa prestriedajú jednotlivé dni týždňa). Ostanú nám teda 2 dni zo siedmeho týždňa. A najlepšie je, aby obidva boli také, že počas nich svieti slniečko. Sú to piatok a sobota a iné nie sú. Tábor má preto začať v piatok v prvom týždni (skončí sa v sobotu v siedmom týždni).

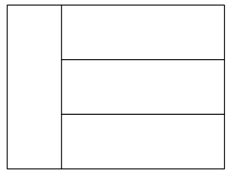
Úloha 3: Máme k dispozícii dva rovnaké kvádre o rozmeroch $3 \times 4 \times 10$. Tieto zlepíme stenami dohromady tak, aby nové teleso malo čo najmenší povrch (povrch je súčet obsahov všetkých stien). Aký veľký je tento povrch?

Výsledok: 248

Riešenie: Povrch telesa, ktoré vznikne zlepením, bude veľký ako povrchy pôvodných kvádrov mínus obsahy stien, ktoré zlepíme. Ak chceme, aby bol povrch vzniknutého telesa čo najmenší, chceme k sebe zlepiť najväčšie steny každého kvádra. Na daných kvádroch sú najväčšie steny tie s rozmermi 4×10. Rozmery nového telesa budú teda $4 \times 10 \times 6$ a jeho povrch vyrátame ako súčet obsahov stien, čiže pre tento prípad $S = 2 \cdot (4 \cdot 10 + 4 \cdot 6 + 10 \cdot 6) = 248$.

Povrch novovzniknutého telesa môžeme vypočítať aj iným spôsobom, a to odpočítaním povrchov zlepených stien od povrchov pôvodných kvádrov. Povrch pôvodného kvádra je 164, kvádre sú dva, čiže spoločne majú povrch 328. Obsah steny, ktorú ideme zlepiť, je 40, steny sú tiež dve, čiže spoločne budú mať obsah 80. Povrch nového telesa bude teda $S = 328 - 80 = 248$.

Úloha 4: Dorotka si nakreslila obrázok, kde štyri rovnako veľké obdĺžniky tvoria veľký obdĺžnik. Dorotka vie, že obsah veľkého obdĺžnika je 108. Aký je obvod malého obdĺžnika?



Výsledok: 24

Riešenie: Pozrieme sa na jeden zo štyroch menších obdĺžnikov, z ktorých je náš obrázok zložený. Jeho kratšiu stranu si označíme x. Z obrázka vidíme, že jeho dlhšia strana je trikrát dlhšia ako krátka (keďže k nej vieme priložiť presne 3 obdĺžniky kratšou stranou), čiže si ju označíme $3x$.

Strany veľkého obdĺžnika sú tým pádom $3x$ a $4x$. Zo zadania vieme, že obsah je $3x \cdot 4x = 108$. Po dorátaní nám vyjde $x = 3$. Teraz už len vypočítame strany malého obdĺžnika. Kratšia strana je rovná $x = 3$ a dlhšia strana $3 \cdot x = 3 \cdot 3 = 9$. Preto obvod malého obdĺžnika bude rovný $o = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 24$.

Úloha 5: Dano má päť červených kariet s číslami 1, 2, 3, 4, 5 a štyri modré s číslami 3, 4, 5, 6. Usporiadajte všetky karty do radu tak, aby sa striedali farby a každé číslo na modrej karte bolo deliteľné číslami na susedných kartách. Do odpovedníka napíšte len číselný rad, ktorý vám vyšiel.

Výsledok: napr. 442633155 (alebo naopak)

Riešenie: Pozrieme sa na každé modré číslo (označíme $3m$, $4m$, $5m$, $6m$), ktorými červenými kartami ($1č$, $2č$, $3č$, $4č$, $5č$) by bolo deliteľné:

3m: $1č$, $3č$

4m: $1č$, $2č$, $4č$

5m: $1č$, $5č$

6m: $1č$, $2č$, $3č$

Keďže sa musia karty striedať, tak musíme začať aj skončiť červenou kartou. Keď sa pozrieme na karty $3m$ a $5m$, tak vidíme, že tieto karty majú len dvoch deliteľov a pri oboch je jedným z nich jednotka. Číslo $5č$ však už nie je ničoho iného deliteľ, takže môže susediť len s $5m$. Tak začneme teda $5č - 5m - 1č$.

Teraz vieme, že $3m$ má len dvoch deliteľov a jeden z nich je $1č$, takže ak niekde musí byť, tak len tu. Dopíšeme teda $3m$ a následne aj $3č$ (máme $5č - 5m - 1č - 3m - 3č$).

Číslo $3č$ je už deliteľom len $6m$, takže pripíšeme aj $6m$. Číslo $6m$ je z nepoužitých čísel deliteľné už len $2č$ (máme $5č - 5m - 1č - 3m - 3č - 6m - 2č$). Teraz už vieme vždy doplniť len jedno také číslo, aby platili podmienky zo zadania, a teda jednoducho doplníme túto radu.

Číselný rad bude vyzerať takto: $5č - 5m - 1č - 3m - 3č - 6m - 2č - 4m - 4č$.

Úloha 6: Zvon na veži zvoní vtedy, keď minútová a hodinová ručička sú na seba kolmé. Koľko krát za 24 hodín bude zvoniť?

Výsledok: 44

Riešenie: Hodinová a minútová ručička sú na seba kolmé 2-krát v priebehu jednej hodiny okrem prípadov o 3:00, 9:00, 15:00 a 21:00, kedy kolmosť spadá do oboch okolitých hodín, ale počíta sa iba raz. Za 24 hodín teda nastane kolmosť $24 \cdot 2 - 4 = 44$ krát.

Úloha 7: Mestečko Lomihlavkovo tvaru štvorca so stranou dlhou 500 metrov je rozdelené rovnými cestičkami -- priamkami (zanedbateľne uzučkými) na 625 štvorcových záhrad s domčekom s rozmermi 20×20 metrov. Janka si vyšla z nejakej časti mestečka a prešla okružnú trasu po cestičkách dlhú 1 kilometer. Koľko najviac domčekov môže byť vnútri Jankinej okružnej trasy?

Výsledok: 156

Riešenie: Svojou trasou chceme ohraničiť útvar s najväčším možným obsahom a obvodom presne 1000 metrov. Keďže sa môžeme pohybovať iba po úsekoch dlhých 20 metrov (lebo cestičky sú dlhé 20 metrov), kľudne si to môžeme vydeliť: $1000 : 20 = 50$. Takže chceme nájsť útvar s obvodom 50 cestičiek, ktorý bude mať najväčší možný obsah. Keďže sa môžeme pohybovať iba po cestičkách, ktoré sú na seba kolmé, tak to musí byť útvar, ktorý má strany na seba kolmé. Z takýchto útvarov má najväčší obsah obdĺžnik (skúste sa zamyslieť, prečo napr. 6-uholník by mal menší obsah). Jeho strany si označme a, b. Vieme, že $2a + 2b = 50$, čiže $a + b = 25$. Obsah vypočítame ako $a \cdot b$, takže hľadáme dve prirodzené čísla, ktorých súčet je 25 a ich súčin je najväčší možný. Súčin je najväčší, ak sú čísla rovnaké, a ak nemôžu byť rovnaké, tak ak je ich rozdiel čo najmenší. V našom prípade sú to čísla 12 a 13. Počet domčekov je rovn?? ich súčinu: $12 \cdot 13 = 156$.

Vnútri Jankinej okružnej trasy môže byť najviac 156 domčekov.

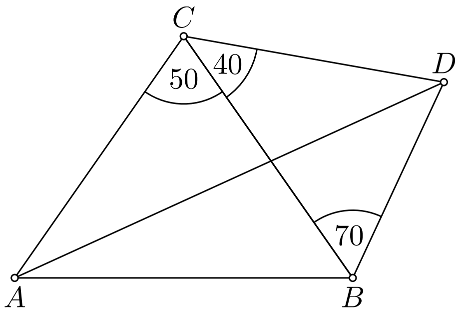
Úloha 8: Viki mala vrecko plné cukríkov. Keď však prišiel Samo, niekoľko cukríkov si od nej zobral. Súčin cukríkov, čo mala Viki predtým a čo má Viki teraz, je 101. Koľko cukríkov jej Samo zobral?

Výsledok: 100

Riešenie: Súčin dvoch čísel (počtu cukríkov, ktoré mala Viki predtým a ktoré má teraz) má byť rovný číslu 101. Treba si uvedomiť, že číslo 101 je prvočíslo, a teda jeho deliteľmi sú iba 1 a ono samotné, čiže 101. Keďže predtým musela mať určite viac cukríkov ako potom, čo jej ich Samo zobral, tak počet cukríkov, ktoré mala predtým, sa rovná číslu 101 a počet tých, ktoré aktuálne má, číslu 1. Pričom rozdiel týchto dvoch hodnôt, $101 - 1 = 100$, je rovný počtu cukríkov, ktoré jej vzal Samo.

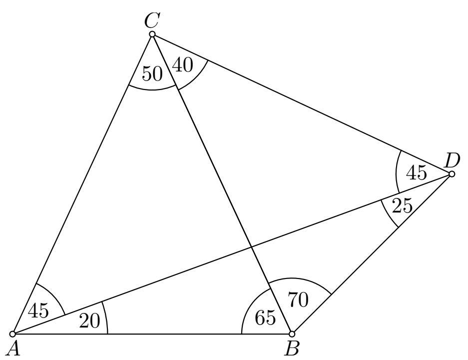
Samo zobral Viki 100 cukríkov.

Úloha 9: Na obrázku je štvoruholník $ABDC$. Trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB. Určte uhly v trojuholníku ABD, ak sú známe veľkosti uhlov vyznačené na obrázku.



Výsledok: 20, 25 a 135 stupňov

Riešenie: Z rovnoramennosti trojuholníka ABC vieme, že veľkosti uhlov ABC a CAB sú $(180 - 50)/2 = 65°$. Súčet uhlov v každom trojuholníku je $180°$, preto veľkosť uhla CDB je $180 - 40 - 70 = 70°$.



Vidíme teda, že aj trojuholník BDC je rovnoramenný, so základňou BD. Úsečka BC je ramenom oboch rovnoramenných trojuholníkov, preto sú aj ich zvyšné ramená, teda AC a CD, zhodné. Trojuholník ACD je rovnoramenný, preto $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADC| = (180° - 90°)/2 = 45°$. Dostali sme sa teda k uhlom trojuholníka ADB: uhol pri vrchole A má veľkosť $65 - 45 = 20°$, pri vrchole B je to $65 + 70 = 135°$, a pri vrchole C máme $70 - 45 = 25°$. Overíme súčet uhlov v trojuholníku (a sedí).

Úloha 10: Zoberme si štvorciferné číslo s rôznymi ciframi. Zameňme každú jeho číslicu aritmetickým priemerom jeho zvyšných číslic (ale tak, aby sme opäť dostali cifry -- celé čísla od 0 do 9). Aké najmenšie a aké najväčšie číslo môžeme takto vytvoriť? Aritmetický priemer čísel je ich súčet predelený počtom čísel.

Výsledok: 3456 a 5643

Riešenie: Tým, že robíme aritmetický priemer, tak to znamená, že súčet troch ľubovoľných cifier čísla musí byť deliteľný tromi. Majme číslo $\overline{abcd}$. Takže ak sa pozrieme na prvý prípad $a + b + c = 3k$ a $b + c + d = 3l$, tak vieme povedať, že a a d majú po delení tromi rovnaký zvyšok, keďže si vieme tieto dve rovnice odčítať a vyjde nám, že $a - d = 3k - 3l$. Takýto proces môžeme spraviť pri každej trojici čísel, a teda zistíme, že všetky tieto štyri cifry musia mať rovnaký zvyšok po delení tromi, takže to môžu byť čísla 2, 5, 8, alebo 1, 4, 7, alebo 0, 3, 6, 9. Keďže hľadáme 4-ciferné číslo s rôznymi ciframi, automaticky nám ostáva len jediná možnosť. Priemery jednotlivých trojíc sú 3, 6, 5 a 4. Najmenší výsledok teda môže byť 3456, ktorý vznikne z čísla 9630. Najväčší by mal byť 6543, no keďže priemer 6 majú čísla 3, 6, 9, znamená to, že na prvej pozícii by bola 0, tým pádom by sme nemali štvorciferné číslo. Takže na začiatku nesmie byť 6ka. Najväčší výsledok teda je 5643, ktorý vznikne z čísla 3069.

Úloha 11: Žanetka mi medzi rečou prezradila, že už má doma toľko kníh, že na ich očíslovanie (číslovala samozrejme od 1) spotrebovala trikrát toľko cifier, ako je počet kníh. Koľko kníh má Žanetka?

Výsledok: 1107

Riešenie: Ak by bola každá kniha očíslovaná trojciferným číslom, tak platí, že cifier je trikrát viac ako kníh. Avšak my číslujeme od jednotky (teda od jednociferných čísel). Pri knihách očíslovaných jednociferným číslom nám chýbajú dve cifry pre každú knihu. Dokopy chýba teda $9 \cdot 2 = 18$ cifier. Pri knihách očíslovaných dvojciferným číslom nám chýba jedna cifra pre každú knihu. Dokopy teda 90 cifier. Spolu jedno a dvojciferným knihám chýba 108 cifier. Každá štvorciferná kniha má jednu cifru naviac. Teda ak budeme mať 108 štvorciferných kníh, tak platí, že cifier je trikrát viac ako kníh. Stoôsme štvorciferné číslo je 1107, teda aj kníh je 1107.

Úloha 12: Nájdite všetky dvojciferné prirodzené čísla, ktorých ciferný súčet je deliteľný ich ciferným súčinom.

Výsledok: 11 a 22

Riešenie: Označme toto dvojciferné číslo $\overline{ab}$. Ciferný súčet tohto čísla je $a + b$, jeho ciferný súčin je ab. Ak má ciferný súčin deliť ciferný súčet, zlomok $\frac{a+b}{ab}$ musí byť rovný celému číslu k. Danú rovnosť vieme upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{ab} &= k, \\ \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} &= k, \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= k. \end{aligned}$$

Keďže deliteľnosť nezávisí od poradia cifier a, b, povedzme si, že $a \leq b$ (potom budeme ako správne riešenia uvažovať aj čísla s prehodenými ciframi). O cifrách a, b vieme, že sú nenulové (zamyslite sa prečo), inak by sme nemohli deliť ich súčinom.

Vyskúšajme, čomu sa môže rovnať a:

Ak $a = 1$, potom $1 + \frac{1}{b} = k$, teda aj zlomok $\frac{1}{b}$ je rovný celému číslu $k - 1$. Cifra b je preto deliteľom 1, teda $b = 1$.

Ak $a = 2$, potom $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} = k$. O čísle b vieme, že je aspoň 2. Pokiaľ $b = 2$, platí, že $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, takže to vyhovuje. Ak je b viac ako 2, potom zlomok $\frac{1}{b}$ bude menej ako $\frac{1}{2}$ (lebo zlomok je tým menší, čím má väčšie číslo v menovateli, ak sa zachováva čitateľ), takže súčet $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, bude menej ako 1, takže nebude celočíselný (vždy bude väčší ako 0, keďže oba zlomky budú kladné).

Všetky ďalšie možnosti pre a nebudú vyhovovať, pretože zlomky $\frac{1}{a}$ a $\frac{1}{b}$ budú maximálne $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, teda tento súčet bude vždy menej ako 1 (a väčší ako 0), teda neceločíselný.

Z toho teda vieme vyvodiť, že jediné vyhovujúce dvojice sú $a = 1, b = 1$ a $a = 2, b = 2$ a z týchto dvojíc vieme utvoriť len čísla 11 a 22, čo sú jediné vyhovujúce.

Iné riešenie: Zo zadania vieme, že $ab|a + b$. To znamená, že $a|a + b$ a zároveň $b|a + b$. Keďže $a|a$, tak musí platiť aj $a|b$ (aby súčet $a + b$ bol deliteľný a) a obdobne aj $b|a$ (aby $b|a + b$). Ak $a|b$ a zároveň $b|a$, tak $a = b$. Teraz musí platiť $a \cdot a|2a$, teda $a|2$, preto $a = 1$ alebo $a = 2$. Vyhovujú teda čísla 11 a 22.

Úloha 13: Na sústredení sa hral futbal. Peťo si zabudol futbalovú tabuľku výsledkov, a tak z pamäti doplnil aspoň to, čo cestou na ubytovňu nezabudol (viď tabuľka). Vidíme na nej všetky vzájomné zápasy, celkové skóre jednotlivých tímov proti ostatným, počet bodov a celkové poradie podľa týchto bodov (ak nastala rovnosť bodov, rozhodne vzájomný zápas). Peťo si to veľmi dobre zapamätal, lebo keď prišla Dorot, tak celú tabuľku zvládla hravo doplniť. Urobte to aj vy, ak viete, ??e za prehru je 0, remízu 1 a výhru 2 body.

	A	B	C	D	skóre	body	poradie
A		$1:1$			$:3$		
B					$:4$	1	
C					$3:1$		$1.$
D	$:5$		$1:$		$:7$	3	

Výsledok:

	A	B	C	D	skóre	body	poradie
A		$1:1$	$0:1$	$5:1$	$6:3$	3	$2.$
B	$1:1$		$0:1$	$1:2$	$2:4$	1	$4.$
C	$1:0$	$1:0$		$1:1$	$3:1$	5	$1.$
D	$1:5$	$2:1$	$1:1$		$4:7$	3	$3.$

Riešenie: Pre jednoduchšie pochopenie vzorového riešenia doporučujeme písať si získané informácie do tabuľky.

Pozrime sa teda na zápasy tímu **B** -- majú 1 bod, čo znamená, že mali jednu remízu a dve prehry. Z tabuľky hneď vieme, že remízovali s **A** tímom, a teda s **C** a **D** tímom tím **B** prehral.

Tím **D** má tri body a tie sa dajú získať práve jednou remízou, práve jednou prehrou a zároveň jednou výhrou alebo troma remízami. Avšak my sme už zistili, že **D** vyhral nad **B**, preto 3 remízy neprichádzajú do úvahy. Ďalej môžeme povedať, že **D** nemohol remízovať s tímom **A**, lebo v riadku **A** by potom skóre cudzích tímov bolo určite aspoň 5 (tú máme zapísanú). Preto musel tím **D** prehrať s tímom **A**, z čoho vyplýva, že remízoval s tímom **C** so stavom $1 : 1$. V zápasoch s **D**čkom mali cudzie tímy skóre 7, a keďže tím **C** uhral v zápase jeden gól a tím **A** 5 gólov, musel tím **B** uhrať práve jeden gól.

Vieme, že v zápasoch s **B**čkom dali ostatné tímy skóre 4 góly. Tím **A** dal jeden, tím **D** musel dať aspoň 2, aby v zápase vyhral, ako sme už povedali vyššie, ale zároveň nesmel dať tri, lebo inak by už nemohlo nad **B**čkom vyhrať **C**čko. Teda **D** dalo **B**čku dva góly a **C**čko jeden. Zápas **B : C** teda musel dopadnúť $0 : 1$, pretože C muselo nutne vyhrať.

Vieme teda už, že zápas **C : B** dopadol $1 : 0$ a zápas **C : D** dopadol $1 : 1$, a to preto, lebo Peťo do tabuľky zaznačil celkové skóre tímu **C** (je to $3 : 1$). Z toho nám vyplýva, že **C : A** musí byť $1 : 0$.

Nakoniec sa pozrime na zápasy **A**čka. Z kolónky skóre vieme, že počas celých športov dostalo **A**čko od súpera 3 góly, a keďže **A : B** je $1 : 1$ a **A : C** je $0 : 1$, tak **A : D** musí byť $5 : 1$.

S takto vyplnenou tabuľkou už určite aj sami zvládnete doplniť skóre, body a nakoniec aj poradie.

Úloha 14: V kaviarni sedia účastníci a vedúci a dokopy je ich 55. Každý z nich pije buď kávu, alebo čaj, a taktiež je pravdovravný alebo klamár (vždy práve jedno z toho). Účastník je pravdovravný práve vtedy, keď pije čaj. Vedúci je pravdovravný práve vtedy, keď pije kávu. Na otázky: „Piješ kávu?“, „Si vedúci?“ a „Prší vonku?“ boli počty kladných odpovedí postupne 44, 33 a 22 (každý odpovedal na každú otázku, a to práve raz). Koľko účastníkov pije čaj? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 0 účastníkov

Riešenie: Označme vedúcich, ktorí pijú čaj, ako V_c a tých, ktorí pijú kávu, ako V_k. Analogicky aj účastníkov ako U_c a U_k. Pozrime sa na prvú otázku (Piješ kávu?). Áno na ňu odpovedia V_k (lebo hovorí pravdu) a V_c (lebo klame). Všetci účastníci odpovedia nie. Z toho teda vieme, že

$$V_c + V_k \quad = \quad 44.$$

Na druhú otázku (Si vedúci?) odpovedajú podľa rovnakého princípu kladne U_k a V_k, a teda:

$$U_k + V_k \quad = \quad 33.$$

Pri tretej otázke si nemôžeme byť istí, či vtedy pršalo, a teda bude platiť jedno z tvrdení:

- Prší: $U_c + V_k = 22$,
- Neprší: $U_k + V_c = 22$.

Buď povedia áno klamári, alebo pravdovravci. Rozoberieme teda obe možnosti. Ak nepršalo, tak potom môžeme sčítať prvé dve rovnice, čím dostaneme:

$$\begin{aligned} (V_c + U_k) + 2V_k &= 77, \\ 22 + 2V_k &= 77, \\ 2V_k &= 55. \end{aligned}$$

Keďže 2 nedelí 55, tak by V_k nebolo celé číslo, čo ale nevyhovuje zadaniu. Ak pršalo, tak sčítame prvú rovnicu a rovnicu $U_c + V_c = 22$, ktorá je odvodená z druhej, lebo ľudí je dokopy 55. Dostanem:

$$\begin{aligned} (U_c + V_k) + 2V_c &= 66, \\ 22 + 2V_c &= 66, \\ V_c &= 22. \end{aligned}$$

Z toho sme zistili, že určite pršalo a 22 vedúcich pilo čaj. Dosadením do $U_c + V_c = 22$ dostaneme, že žiaden účastník nepil čaj.

Úloha 15: Na sústredenie bolo pozvaných 15 účastníčok (dievčat) a istý počet účastníkov (chlapcov). Každá účastníčka sa už skôr poznala aspoň s 3, ale najviac so 6 účastníkmi. Každý účastník sa poznal aspoň so 4, ale najviac však s 9 účastníčkami. Poznanie je vzájomné, ak účastník pozná účastníčku, tak aj účastníčka pozná účastníka. Koľko najmenej a koľko najviac mohlo byť na sústredku účastníkov (chlapcov)?

Výsledok: 5 a 22

Riešenie: Najskôr zistíme, koľko existuje poznaní medzi účastníkmi a účastníčkami. Označme si toto číslo ako p. Vieme, že každá účastníčka pozná minimálne 3 účastníkov a maximálne 6 účastníkov, teda platí: $3 \cdot 15 = 45 \leq p \leq 90 = 6 \cdot 15$. Teraz si označme počet účastníkov ako u a tento výpočet p si zopakujeme z pohľadu účastníkov (vieme, že každý poznal aspoň 4 účastníčky a najviac 9 účastníčok), teda platí: $4u \leq p \leq 9u$. Odtiaľ vyplýva, že $4u \leq p \leq 90$ (keďže p je najviac 90), teda z toho vyplýva, že $u \leq 22.5$, takže maximálny počet účastníkov je najviac 22. Pre tento počet je možné splniť všetky podmienky, ak každý chlapec pozná práve 4 dievčatá, napr. takto: chlapec 1 pozná dievčatá 1, 2, 3, 4; chlapec 2 pozná dievčatá 5, 6, 7, 8; atď. chlapec 4 pozná dievčatá 13, 14, 15, 1; chlapec 5 pozná dievčatá 2, 3, 4, 5; atď. každé dievča vtedy pozná 6 alebo 5 chlapcov.

Nakoniec ešte využijeme ohraničenie p zdola -- musí to byť aspoň 45: $45 \leq p \leq 9u$. Z tohto vieme, že $5 \leq u$, teda najnižší možný počet účastníkov je 5. Navyše tento počet možno dosiahnuť vtedy, ak každý chlapec pozná práve 9 dievčat. Napr. chlapec 1 pozná dievčatá 1, 2, ..., 9; chlapec 2 pozná dievčatá 10, ..., 15, 1, 2, 3; atď. každé dievča vtedy pozná práve 3 chlapcov.

Na sústredení bolo aspoň 5 účastníkov, avšak najviac 22 účastníkov.

Úloha 16: Skladanie puzzle prebieha v ťahoch. V každom ťahu spojíme 2 časti dokopy (napríklad 2 kúsky puzzle alebo 1 kúsok s väčšou poskladanou časťou alebo 2 väčšie časti dokopy). Na koľko najmenej ťahov sa dá poskladať 2000 kúskové puzzle?

Výsledok: 1999

Riešenie: Všimnime si, že v každom ťahu sa nám počet poskladaných častí, v ktorých máme tých 2000 dielikov, zníži o 1. Je to preto, že v každom ťahu z dvoch častí urobíme jednu. Na začiatku tvorí každý kúsok samostatnú časť, a preto ich máme 2000. Skončíme vtedy, keď je to celé spojené, t.j. máme len jednu časť. Preto vždy potrebujeme $2000 - 1 = 1999$ ťahov.

Úloha 17: Nahraďte hviezdičky na obrázku prirodzenými číslami tak, aby najspodnejšie číslo bolo čo najmenšie možné. Každé číslo však môžete použiť najviac raz a pre všetky hviezdičky (okrem najvyšších štyroch) platí, že každá je súčtom dvoch hviezdičiek bezprostredne nad ňou. Aké číslo je úplne dole?

$$
\begin{array}{ccccccc}
* & & * & & * & & * \\
& * & & * & & * & \\
& & * & & * & & \\
& & & * & & &
\end{array}
$$

Výsledok: 20

Riešenie: Najprv si tam uložme namiesto konkrétnych čísel čísla a, b, c, d a zrátajme, akú hodnotu bude mať spodná hviezdička.

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & d \\ & a+b & & b+c & & c+d & \\ & & a+2b+c & & b+2c+d & & \\ & & & a+3b+3c+d & & & \end{array}$$

Vidíme, že spodná hviezdička má hodnotu $a+3b+3c+d$. To znamená, že chceme dať čísla do horného riadku tak, aby tento súčet bol čo najmenší a zároveň, aby sme splnili podmienku zo zadania, že každá hviezdička má iné číslo.

Tak teraz je ideálne ísť od najmenších čísel v prvej rade a postupne ich zvyšovať. Do stredu chceme dať čo najmenšie čísla (lebo do spodnej hviezdičky sa zarátavajú až 3-krát), a tak tam skúsime dať 1 a 2. Teraz skúsime dopasovať vedľa nich čo najmenšie čísla.

Vieme, že číslo 3 použiť nemôžeme, lebo to je súčtom $1+2$, a teda sa tam nachádza. Najmenšie čísla sú teraz 4 a 5. Pri nich si všimneme, že akokoľvek ich dáme, tak hneď v druhom riadku sa nám objaví číslo, ktoré sa opakuje. Následne skúsime 4 a 6 (teraz by mala spodná hviezdička číslo 19, ak by sa to dalo) a zistíme, že ani toto sa nedá.

Pre číslo 20 (na mieste spodnej hviezdičky) nájdeme napríklad toto rozloženie:

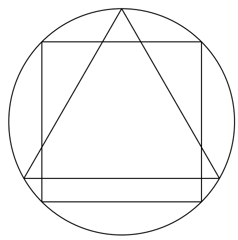
$$\begin{array}{ccccccc} 7 & & 1 & & 2 & & 4 \\ & 8 & & 3 & & 6 & \\ & & 11 & & 9 & & \\ & & & 20 & & & \end{array}$$

Teraz sa treba zamyslieť, či sa nedajú zmeniť stredné dve čísla tak, aby bola spodná hviezdička menšia ako 20. Skúsime teda dať do stredu 1 a 3, a potom podobne ako pred chvíľou skúsime pár možností, kým nedostávame súčet $a + 3b + 3c + d$ väčší alebo rovný 20 (a nenájdeme žiadnu možnosť).

Potom ešte skúsime dať do stredu 2 a 3 alebo 1 a 4, ale tu veľmi rýchlo zistíme, že $a + 3b + 3c + d$ už je aspoň 20, takže tieto, ani väčšie čísla v strede už nám nemôžu zabezpečiť spodnú hviezdičku menšiu ako 20.

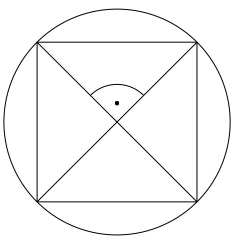
To znamená, že spodná hviezdička môže mať hodnotu najmenej 20.

Úloha 18: Jedným zo symbolov Lomihlavkova je kružnica, do ktorej je vpísaný štvorec a rovnostranný trojuholník (ako na obrázku). Určte pomer medzi obsahom trojuholníka a štvorca.



Výsledok: $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{8}$

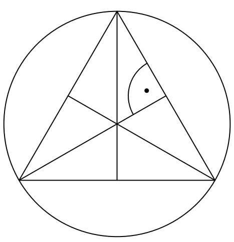
Riešenie: Obsah štvorca aj trojuholníka je jednoznačne daný polomerom kružnice. Našim cieľom bude vyjadriť ich (pomocou polomeru r). Spočítať ich pomer potom už nie je problém.



Štvorec je rozdelený svojimi uhlopriečkami na 4 zhodné pravouhlé rovnoramenné trojuholníky (viď obr.).

Zo symetrie sa musia uhlopriečky pretínať v strede kružnice, preto ramená týchto trojuholníkov sú polomery kružnice. Obsah štvorca je teda

$$4\frac{r \cdot r}{2} = 2r^2.$$



Podobný trik využijeme na vpísaný trojuholník, ktorý rozdelíme výškami (a zároveň ťažnicami, lebo v rovnostrannom trojuholníku sú totožné) na 6 zhodných pravouhlých trojuholníkov (viď obr.).

Opäť zo symetrie vieme, že ťažisko je zároveň stredom kružnice. Preto v každom zo šiestich trojuholníkov je prepona polomerom a jedna odvesna polovicou polomeru (lebo ťažisko delí ťažnice v pomere 2:1). Tretiu stranu vypočítame pomocou Pytagorovej vety:

$$\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

Teraz už vieme určiť obsahy 6 malých trojuholníčkov ako súčin odvesien deleno 2. Teda obsah vpísaného trojuholníka bude

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}r}{2} \cdot \frac{r}{2}\right) = 6\frac{\sqrt{3}r^2}{8} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Nakoniec už len určíme pomer obsahu štvorca a obsahu trojuholníka

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4} : 2r^2 = 3\sqrt{3} : 8.$$

Úloha 19: V STROMáckej miestnosti máme taký stroj, do ktorého keď zadáme 2 prirodzené čísla X, Y, tak vypľuvne jedno číslo podľa istého pravidla. Tento stroj si vypočíta 3 hodnoty, a to $X \cdot X + Y \cdot Y$, $297 - X \cdot X$ a $402 - Y \cdot Y$, a vyberie z nich tú najmenšiu, ktorú teda vypľuvne. Aké najväčšie číslo môže stroj vypľuvnúť?

Výsledok: 233

Riešenie: Najprv sa pozrieme na možnosť, kde by sa dané tri číselné hodnoty, ktoré vyráta stroj, rovnali. Potom platia rovnice:

$$\begin{aligned} X \cdot X + Y \cdot Y &= 297 - X \cdot X \\ 297 - X \cdot X &= 402 - Y \cdot Y \end{aligned}$$

Z prvej rovnice si vyjadríme $Y \cdot Y$

$$Y \cdot Y = 297–2 \cdot X \cdot X$$

Čo môžeme dosadiť do druhej rovnice a dorátame X

$$\begin{aligned} 297 - X \cdot X &= 402 - Y \cdot Y \\ 297 - X \cdot X &= 402 - 297 + 2 \cdot X \cdot X \\ 3 \cdot X \cdot X &= 192 \\ X \cdot X &= 64 \\ X &= 8 \end{aligned}$$

Následne dosadením $X = 8$ do niektorej z rovníc dorátame Y, čo nám vyjde $Y = 13$. Teraz už len dorátame, že výsledná hodnota, ktorú by stroj vypľul, by v tomto prípade bola rovná 233, čo sedí s tým, čo sme chceli. Najväčšie číslo, aké môže stroj vypľuvnúť, je 233.

Teraz si treba uvedomiť, prečo prípad, ktorý sme hore rozobrali, je práve naša hľadaná maximálna hodnota, akú vie náš stroj vypľuvnúť. Keďže my stroju zadávame čísla X a Y, tak oproti tomuto prípadu ich vieme zväčšiť alebo zmenšiť. Pozrieme sa, čo by sa však s našimi číslami v takomto prípade stalo.

Ak by sme hociktoré z čísel X, Y zväčšili, tak sa automaticky zväčšia aj hodnoty $X \cdot X$, respektíve $Y \cdot Y$. Z toho ale vyplýva, že sa zmenší určite niektorý z výrazov $297 - X \cdot X$, $402 - Y \cdot Y$. To by ale znamenalo, že by to bolo určite menšie číslo ako 233 a náš stroj by si ho musel vybrať.

Ak by sme hociktoré z čísel X, Y zmenšili, tak sa automaticky zmenšia aj hodnoty $X \cdot X$, respektíve $Y \cdot Y$. Z toho ale vyplýva, že sa zmenší aj ich súčet, a teda výraz $X \cdot X + Y \cdot Y$ by mal menšiu hodnotu a náš stroj by si ho určite vybral a vrátil by nám číslo menšie ako 233.

Ako vidíme, čokoľvek by sme s našimi číslami spravili, niektorý člen by nadobudol menšiu hodnotu ako 233, ale keďže by bola minimálna, náš stroj by si ju musel vybrať. Najväčšie číslo, aké môže stroj vypľuvnúť, je 233.

Iné riešenie:

Rovno na začiatku si môžeme všimnúť, že súčet týchto troch čísel je vlastne konštanta (stále rovnaký):

$$X \cdot X + Y \cdot Y + 297 - X \cdot X + 402 - Y \cdot Y \quad = \quad 699$$

To znamená, že 699 sa vlastne vždy prerozdelí medzi tieto tri čísla. My chceme, aby minimum z týchto troch čísel bolo čo najväčšie, a to dosiahneme tak, že každé z nich bude teda rovné $699/3 = 233$. Ak by totižto ktorékoľvek z týchto čísel bolo viac ako tretina z 699, tak iné by zase muselo byť menšie, a teda by sa zmenšilo vypľuvnuté číslo (preto budú tieto tri čísla rovnaké).

Teraz vyrátame kedy sa tieto tri čísla, ktoré stroj vyráta, rovnajú (viď predchádzajúce riešenie).

Dostali sme $X = 8$ a $Y = 13$. Teraz už len skúsime, či výsledná hodnota, ktorú by stroj vypľul, je naozaj rovná 233. Najväčšie číslo, aké môže stroj vypľuvnúť, je 233.

Úloha 20: Najmenej koľkými priamkami sa dá rovina rozdeliť na presne 1000 častí?

Výsledok: 45

Riešenie: Na začiatku máme 1 oblasť.

- Jedna priamka ju rozdelí na 2 oblasti.
- Pridaním druhej priamky pridáme jednu oblasť, a ak ňou pretneme tú predošlú priamku pridáme druhú oblasť.
- Pridaním tretej priamky pridáme jednu oblasť a naviac za každý priesečník s priamkou, ktorá tam už je, pridáme ďalšiu oblasť.
- Takto budeme pokračovať, až kým nedáme všetky priamky, ktoré sme tam chceli dať.

Všimnime si, že za každú priamku a každý priesečník sme vždy pridali 1 oblasť. Preto ak označíme n počet priamok, O počet oblastí, a P počet priesečníkov, tak platí: $O = P + n + 1$.

Chceme, aby $O = 1000$ a zároveň n bolo čo najmenšie. Najviac priesečníkov budeme mať, ak sa každá priamka pretne s <u>každou</u>, z čoho dostaneme $P \leq n(n-1)/2$. Potom platí

$$O \leq \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Pre $n = 44$ dostaneme, že $O \leq 991$, teda rovinu rozdelíme najviac na 991 oblastí. Ak však použijeme priamok 45, tak už by to mohlo ísť. Keby sme pretli každú priamku s každou dostaneme 1036 oblastí, čo je veľa. Preto potrebujeme ubrať 36 priesečníkov. To urobíme tak, že 9 z tých 45 priamok bude navzájom rovnobežných (teda sa nepretnú). Ak by sa 9 priamok pretlo každá s každou, tak sa pretnú v najviac $9 \cdot 8/2 = 36$ rôznych bodoch. Čo znamená, že sme naozaj ubrali 36 priesečníkov a rovina je rozdelená na 36 oblastí.

Rovina sa dá rozdeliť na presne 1000 častí najmenej 45 priamkami.

Hádanka 1: Čím viac nás máš, tým menej vidíš. Čo sme?

Výsledok: dioptrie

Hádanka 2: Ktorý duch nás nenaľaká?

Výsledok: vzduch

Hádanka 3: Traja muži sa potápajú pod vodou, ale keď všetci vylezú z vody, tak len dvaja majú mokré vlasy. Ako je to možné?

Výsledok: jeden je holohlavý

Hádanka 4: Čo hlavu ráno stráca, ale večer ju znova získava?

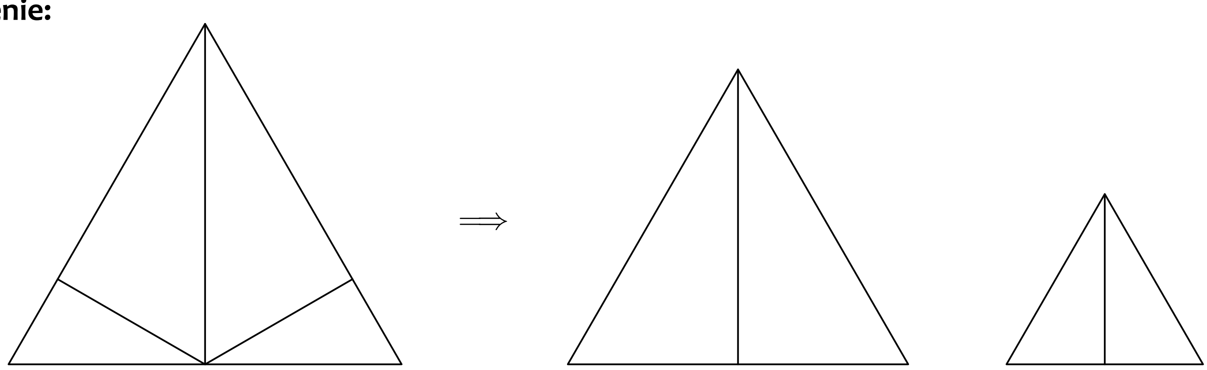
Výsledok: vankúš

Hádanka 5: You may enter, but you may not come in, I have a space, but no room, I have keys, but open no lock. What am I?

Výsledok: klávesnica

Hlavolam 1: Nájdite spôsob, ako rozrezať rovnostranný trojuholník rovnými rezmi na štyri časti tak, aby sa z nich dali zložiť dva menšie rovnostranné trojuholníky. Nakreslite tiež, ako ich zložíte do dvoch trojuholníkov.

Riešenie:

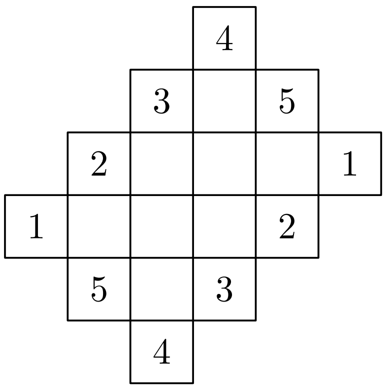


Hlavolam 2: Máme kruh rozdelený na dva polkruhy. Nájdite rovinný útvar U, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

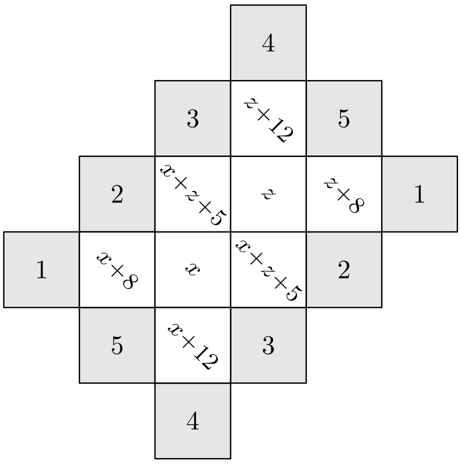
1. jedným kusom U nie je možné úplne zakryť nakreslený polkruh,
2. dvoma rovnakými kusmi U už je však možné zakryť celý kruh.

Riešenie: Riešení je nekonečne veľa. Základná myšlienka pri riešení mohla byť napríklad symetrické rozdelenie kruhu na polovice nejakým iným spôsobom. Tu sú dve z možných riešení:

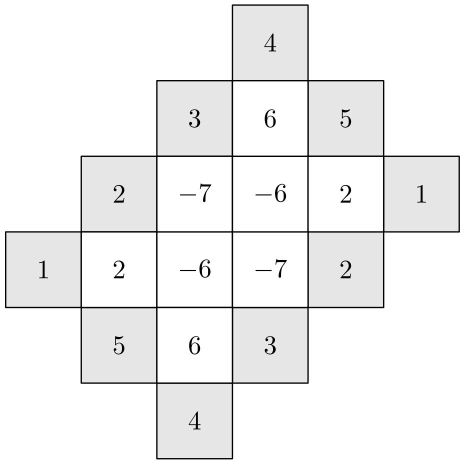
Hlavolam 3: Doplňte čísla do štvorčekov na obrázku tak, aby v každom vnútornom štvorčeku bolo napísané číslo, ktoré je súčtom jeho 4 susedov.



Riešenie: Čísla v nasledujúcich dvoch políčkach si označíme ako x a z, takže teraz máme všetky zvyšné políčka tak, že poznáme hodnotu na všetkých susedných k nim, čiže si vieme každé políčko vyjadriť (obr. 1). Teraz sa pozrieme opäť na políčko s hodnotou x. To musí byť súčtom jeho susedov, takže $x = x + 8 + x + 12 + x + z + 5 + x + z + 5 = 4x + 2z + 30$, čiže z toho vieme povedať, že keď $x = 4x + 2z + 30$, tak $x - 30 = 4x + 2z$, a teda $-30 = 3x + 2z$ Rovnako si odvodíme aj $z = 4z + 2x + 30$, a potom z toho, že $-30 = 3z + 2x$. Takže vidíme, že $3x + 2z = 3z + 2x$, potom $x = z$. Teraz môžeme za všetky z napísať x. Opäť sa pozrieme na políčko s x a vyjadríme si ho ako súčet jeho susedov (teraz, keď už máme okolo iba x-ká, povie nám to viac ako predtým) a po sčítaní nám vyjde, že $x = 6x + 30$, čiže $5x = -30$, takže x bude -6. No a teda iba dosadíme všade za x číslo -6 a máme vyplnené všetky políčka (obr. 2).



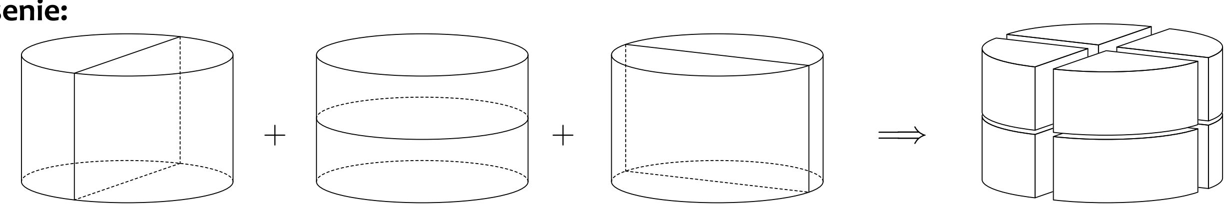
obr. 1



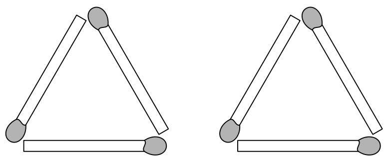
obr. 2

Hlavolam 4: Popíšte alebo nakreslite, ako rozdeliť klasickú okrúhlu tortu 3 priamymi rezmi na 8 rovnakých častí (kúsky nemôžete počas krájania presúvať).

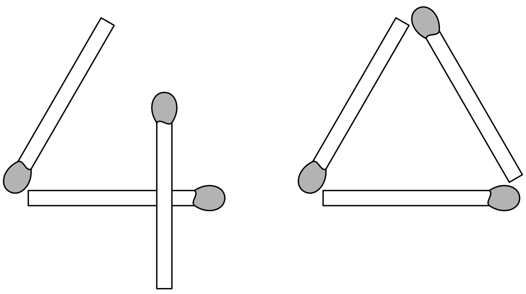
Riešenie:



Hlavolam 5: Premiestnite jednu zápalku tak, aby ste z týchto dvoch trojuholníkov dostali 4 krát rovnaký trojuholník.



Riešenie:



Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2015 sa koná už 15. ročník tejto súťaže.

Súťaž trvá (čarovných) 66 minút. Súťažiaci zo základných škôl (7. - 9. ročník) a príslušných tried osemročných gymnázií (sekunda až kvarta) súťažia v štvorčlenných družstvách. Družstvá dostanú na začiatku 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Môžu ich riešiť v ľubovoľnom poradí, pričom získavajú:

$+3$ body za odovzdanú a správne vyriešenú úlohu;

$+1$ bod za odovzdaný a správne vyriešený hlavolam alebo hádanku;

-1 bod za odovzdanú a nesprávne vyriešenú úlohu, hlavolam alebo hádanku;

0 bodov za neodovzdanú úlohu, hlavolam alebo hádanku.

Zadania starších ročníkov nájdete na *https://matik.strom.sk/sk/lomihlav*.

STROM

http://www.strom.sk
http://matik.strom.sk
http://matik.strom.sk/sk/lomihlav

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY P. J. ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH • 1963 •

http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta
http://skoly.upjs.sk