Lomihlav

Košice, 30. 11. 2018

Úlohy

Úloha 1:

V rade stojí 1000 vedúcich, ktorí rátajú ťažký príklad. Najskôr to vzdajú všetci vedúci, čo stoja na párnych pozíciách. Potom to vzdajú všetci vedúci, čo stoja teraz na párnych pozíciách. Takto to vzdávajú, až kým neostane len jeden vedúci. Vedúci na ktorej pozícii sa nikdy nevzdá?

Výsledok: 1

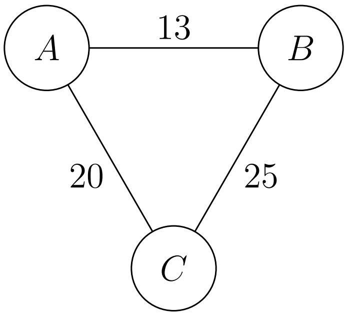
Riešenie:

Na túto úlohu je dobré pozrieť sa odzadu. Na konci sa nevzdal len jeden vedúci, ktorý stojí na nepárnom – prvom mieste. Pred tým, ako zostal sám, tu boli vedúci dvaja, pričom jeden stál aj na druhom mieste, preto sa vzdal. Ešte predtým boli vedúci štyria, pričom sa vzdali vedúci na druhom a štvrtom mieste, po čom sa vedúci, ktorý stál na treťom mieste, posunul na druhé miesto.

Tu si môžeme všimnúť podstatu vzdávania sa vedúcich. Pri každom počte vedúcich, ktorý je rovný alebo väčší ako dva, sa vždy vzdá vedúci na druhom mieste. Postupne sa tak všetci vedúci, ktorí stoja na vyššom ako druhom mieste, ocitnú na druhom mieste a vzdajú sa, ak sa nevzdali dovtedy. Nevzdá sa len jeden vedúci, ktorý stojí na prvom mieste, a teda sa nikdy na nijaké iné miesto neposunie – keďže bude stáť po celý čas na nepárnom mieste, nikdy sa nevzdá.

Úloha 2:

Čísla pri čiarach označujú súčet čísel v kruhoch, ktoré spájajú. Aké čísla máme doplniť do kruhov?



Výsledok: $A = 4$; $B = 9$; $C = 16$

Riešenie:

Zoberme si kruh s číslom A. Z neho vedú 2 čiary. Jedna má pri sebe číslo 13 a druhá 20. Z toho vieme, že $A + B = 13$, a zároveň aj to, že $A + C = 20$. Odčítaním týchto rovníc od seba vidíme, že $C - B = 7$. Podľa čiary medzi kruhmi B a C vidíme, že $C + B = 25$, a sčítaním s predchádzajúcou rovnicou máme $2 \cdot C = 32$, čiže $C = 16$. Keďže už poznáme hodnotu C, tak vieme dopočítať aj B, lebo $16 - B = 7$, z čoho $B = 9$. Nakoniec podľa čiary medzi kruhmi A a B máme $A + B = 13$, a preto $A = 4$.

Úloha 3:

Freďo si napísal na tabuľu čísla od 1 do 2018 vrátane. Červenou podčiarkol tie, ktoré sú násobkom dvojky, bielou tie, čo sú násobkom trojky, a tie, čo sú násobkom štvorky, podčiarkol modrou. Koľko čísel bolo podčiarknutých všetkými troma farbami?

Výsledok: 168

Riešenie:

Najprv si musíme uvedomiť, že každé číslo, ktoré je násobkom čísla 4, je zároveň aj násobkom čísla 2. To pre nás znamená, že nám stačí nájsť čísla, ktoré sú násobkami čísel 4 a 3. Takéto čísla sú však násobky čísla 12.

Delením zistíme, že číslo 2018 nám dáva zvyšok 2 po delení tromi aj štyrmi. To znamená, že najväčšie číslo, ktoré vyhovuje zadaniu, je 2016. Teraz nám už iba zostáva zistiť, koľko je čísel, ktoré sú násobkom 12, čo vypočítame ako $2016/12 = 168$. Tento výsledok nám hovorí, že medzi číslami 1 a 2016 (a teda aj 1 a 2018) je 168 čísel, ktoré sú podčiarknuté všetkými troma farbami.

Úloha 4:

Aký je najmenší kladný násobok čísla 9, ktorého všetky cifry sú párne?

Výsledok: 288

Riešenie:

Najprv sa zamyslime nad tým, aké pravidlo spĺňajú násobky čísla 9. Vieme o nich, že ich ciferný súčet je deliteľný deviatimi. To znamená, že hľadané číslo bude mať ciferný súčet 9, 18, 27, 36,...Musíme však zobrať do úvahy to, že nevieme dostať nepárny ciferný súčet iba s párnymi ciframi. To znamená, že naše hľadané číslo bude mať ciferný súčet najmenej 18.

Vieme však nájsť číslo s ciferným súčtom 18, ktoré spĺňa podmienky zo zadania? Určite o ňom môžeme povedať, že nebude jednociferné ani dvojciferné, pretože 99 má ako jediné také číslo ciferný súčet 18.

Skúsme teda zistiť, či môže existovať trojciferné číslo, ktoré by vyhovovalo našim podmienkam. Vieme o ňom, že na mieste stoviek má byť čo najmenšia párna číslica (aby sme získali čo najmenšie číslo). Tou je číslo 2 (ak by tam bola 0, tak nemáme trojciferné číslo). V takom prípade vidíme, že cifra na mieste desiatok a cifra na mieste jednotiek budú dávať súčet 16. To však s párnymi (jednocifernými) číslami vieme docieliť iba s dvoma osmičkami. To znamená, že najmenšie číslo s ciferným súčtom 18 je 288.

Takto sme však našli najmenšie číslo s ciferným súčtom 18. Čo však, ak by bol ciferný súčet väčší ako 18? Keďže vieme získať iba párne ciferné súčty, tak v ďalších možnostiach by už ciferný súčet musel byť aspoň 36 (18 už uvažovať nemusíme). V takom prípade by sme však nutne potrebovali viac ako trojciferné číslo, pretože v trojcifernom čísle vieme získať maximálne $9 + 9 + 9 = 27$ ako ciferný súčet. Čiže určite by sme dostali číslo väčšie ako 288. To znamená, že naše hľadané číslo bude 288.

Úloha 5:

Štvorciferné číslo je zakončené číslicou 2. Keď túto číslicu presunieme na prvé miesto (a ostatné číslice ponecháme bez zmeny), dostaneme číslo o 234 väčšie. Určte pôvodné číslo.

Výsledok: 1962

Riešenie:

V tejto úlohe je dôležité uvedomiť si, že sa nám stačí pozerať na cifry. Tiež je dôležité vedieť, že cifra, ktorá v pôvodnom čísle určovala počet jednotiek, určuje v novom čísle počet tisícok. Cifra, ktorá v pôvodnom čísle určovala počet desiatok, určuje v novom čísle počet jednotiek. Cifra, ktorá v pôvodnom čísle určovala počet stoviek, určuje v novom čísle počet desiatok. A cifra, ktorá v pôvodnom čísle určovala počet tisícok, určuje v novom čísle počet stoviek.

Informáciu, že nové číslo je o 234 väčšie ako pôvodné číslo, si predstavíme tak, že nové číslo je o 4 jednotky, 3 desiatky a 2 stovky väčšie.

Naše pôvodné číslo malo na mieste jednotiek 2 a teraz je o 4 jednotky väčšie, tak nové číslo musí mať na mieste jednotiek $2 + 4 = 6$. Vieme teda, že pôvodné číslo muselo mať na mieste desiatok 6.

Naše pôvodné číslo malo na mieste desiatok 6 a teraz je o 3 desiatky väčšie, tak nové číslo musí mať na mieste desiatok $6 + 3 = 9$. Vieme teda, že pôvodné číslo muselo mať na mieste stoviek 9.

Naše pôvodné číslo malo na mieste stoviek 9 a teraz je o 2 stovky väčšie, tak nové číslo musí mať na mieste stoviek 1, keďže prechádzame cez desiatky. Vieme teda, že pôvodné číslo muselo mať na mieste tisícok 1 a nové číslo musí mať na mieste tisícok 2, aby sa nestratil zvyšok. O novom čísle už zo zadania vieme, že na mieste tisícok má cifru 2, takže to nie je problém.

Teraz už vieme, aká cifra je v pôvodnom čísle na akom mieste. Pôvodné číslo je 1962.

Úloha 6:

Určte súčet všetkých čísel, ktoré sa dajú zapísať ako súčet práve 3 rôznych čísel z množiny 1, 2, 3, 4,...116.

Výsledok: 59670

Riešenie:

Najmenšie číslo, ktoré vieme zapísať ako súčet práve 3 rôznych čísel z danej množiny, je $1+2+3 = 6$. Najväčšie číslo, ktoré vieme zapísať ako súčet práve 3 rôznych čísel z danej množiny, je $114 + 115 + 116 = 345$.

Ďalej je dôležité uvedomiť si, že všetky ostatné čísla medzi týmito dvoma sa tiež dajú zapísať ako súčet práve 3 čísel z danej množiny. To preto, lebo v danej množine sú všetky prirodzené čísla od 1 do 116 vrátane, a teda vieme postupovať nasledovne.

Na začiatku si vyberieme čísla 1, 2 a 3, ktoré nám dajú najmenší dosiahnuteľný súčet, teda 6. Čísla 1 a 2 si teraz zafixujeme a budeme postupne zvyšovať tretie číslo po jednotkách. Takto sa dostaneme až k trojici 1, 2 a 116 so súčtom 119. Teraz si zafixujeme 1 a 116 a budeme postupne zvyšovať stredné číslo po jednotkách. Takto sa dostaneme až k trojici 1, 115 a 116 so súčtom 232. Teraz si zafixujeme 115 a 116 a budeme po jednotkách zvyšovať prvé číslo. Takto sa dostaneme až ku trojici 114, 115 a 116 so súčtom 345, teda najväčším možným. Takto sme po jednotkách stúpali od súčtu 6 až po súčet 345, a teda všetky tieto súčty vieme zapísať ako súčet práve 3 rôznych čísel z danej množiny.

Teraz nám už len ostáva všetky tieto čísla sčítať. Kalkulačky používať nemôžeme, a teda to urobíme nejak rozumne. Najprv sčítame všetky čísla od 1 do 345. To urobíme tak, že popárujeme čísla, aby vždy dávali súčet 346. Prvá dvojica bude 1 a 345, druhá 2 a 344, tretia 3 a 343...Takýchto dvojíc tam bude 344/2 a číslo $173 = 346/2$ nebude mať dvojicu. Celkový súčet preto bude

$$\frac{344}{2} \cdot 346 + \frac{346}{2} = \frac{346 \cdot 345}{2}.$$

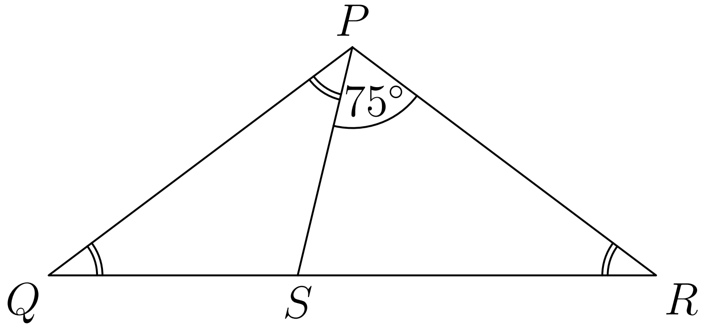
Teraz od toho odpočítame súčty, ktoré dostať nevieme, a to 1 až 5, teda máme $(346 \cdot 345)/2 - 15$. Dostaneme 59670.

Úloha 7:

Trojuholník PQR je rovnoramenný so základňou QR. Bod S leží na strane QR tak, že $|QS| = |PS|$ a uhol RPS má veľkosť 75°. Aká je veľkosť uhla QRP?

Výsledok: 35°

Riešenie:



V riešení úlohy budeme opakovane využívať, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Pozrime sa najprv na trojuholník SRP, v ktorom si vyjadríme veľkosť uhla PSR: $|\sphericalangle PSR| = 180° - 75° - |\sphericalangle QRP| = 105° - |\sphericalangle QRP|$.

Teraz si všimnime trojuholník QSP. Keďže $|QS| = |PS|$, tak tento trojuholník je tiež rovnoramenný so základňou PQ. Uhol QSP je susedný s uhlom PSR, a teda vieme jednoducho vypočítať jeho veľkosť: $|\sphericalangle QSP| = 180° - (105° - |\sphericalangle QRP|) = 75° + |\sphericalangle QRP|$.

Zvyšné dva vnútorné uhly trojuholníka QSP sa musia rovnať, čiže ich vieme z veľkosti uhlu QSP dopočítať.

$$|\sphericalangle PQS| = |\sphericalangle QPS| = \frac{180° - (75° + |\sphericalangle QRP|)}{2} = \frac{105° - |\sphericalangle QRP|}{2}$$

Vnútorné uhly pri základni QR trojuholníka PQR sa musia rovnať, lebo tento trojuholník, ako je zo zadania známe, je rovnoramenný. Keďže $\sphericalangle PQS$ je ten istý ako $\sphericalangle PQR$, dostali sme jednoduchú rovnicu, z ktorej nám už len stačí vyrátať veľkosť uhla QRP.

$$\begin{aligned}
\frac{105° - |\sphericalangle QRP|}{2} &= |\sphericalangle QRP| \\
105° - |\sphericalangle QRP| &= 2 \cdot |\sphericalangle QRP| \\
3 \cdot |\sphericalangle QRP| &= 105° \\
|\sphericalangle QRP| &= 35°
\end{aligned}$$

Veľkosť uhla QRP je 35°.

Úloha 8:

Do mriežky 3×3 doplňte čísla tak, aby v každom stĺpci, riadku aj diagonále bol rovnaký súčet.

		33
31	28	

Výsledok:

27	36	33
38	32	26
31	28	37

Riešenie:

Najprv si označme jedno z políčok x, napríklad to stredné.

		33
	x	
31	28	

Vidíme, že súčet čísel v diagonále je $31 + x + 33 = 64 + x$. Takýto súčet čísel je aj v každom riadku a stĺpci, a preto vieme teraz do ostatných políčok podosadzovať aj ďalšie výrazy tak, aby sa súčty stále rovnali $64 + x$.

V pravom dolnom rohu bude $(64+x)-28-31 = 5+x$, v ľavom hornom rohu bude $(64+x) - x - (5+x) = 64 - 5 - x = 59 - x$, v strede horného radu bude $(64+x) - 33 - (59 - x) = 31 + x - 59 + x = 2x - 28$ a v strede ľavého stĺpca $(64+x) - 31 - (59-x) = 33 + x - 59 + x = 2x - 26$.

$59 - x$	$2x - 28$	33
$2x - 26$	x	
31	28	$5 + x$

Už nám ostalo len jedno políčko, a to v strede pravého stĺpca. Všimnime si, že ho vieme vyjadriť dvoma spôsobmi. Zo stĺpca by sme jeho hodnotu vyjadrili ako

$$(64 + x) - 33 - (5 + x) = 64 - 33 - 5 = 26,$$

z riadku ako

$$(64 + x) - (2x - 26) - x = 64 + x - 2x + 26 - x = 90 - 2x.$$

Vieme teda zostaviť jednoduchú rovnicu a vypočítať z nej x.

$$\begin{aligned} 90 - 2x &= 26 \\ 2x &= 64 \\ x &= 32 \end{aligned}$$

Teraz už len podosadzujeme hodnotu x do výrazov, ktorými boli vyjadrené hodnoty políčok a dostaneme výsledok.

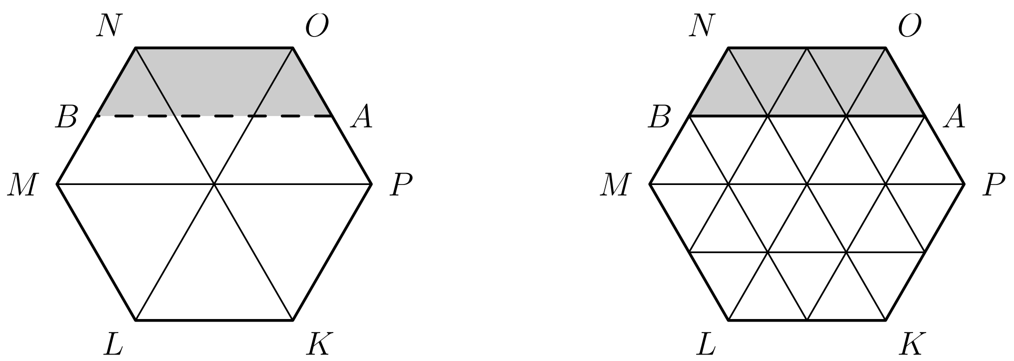
Úloha 9:

V pravidelnom šesťuholníku $KLMNOP$ sú body A a B stredmi strán OP a MN. Akú časť obsahu šesťuholníka $KLMNOP$ tvorí obsah štvoruholníka $ABNO$?

Výsledok: 5/24

Riešenie:

Rozdelíme si šesťuholník na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov a následne každý z nich rozdelíme strednými priečkami na štyri zhodné rovnostranné trojuholníky (pričom vieme, že stredné priečky delia trojuholník na štyri menšie, navzájom zhodné trojuholníky):



Na obrázku teraz môžeme vidieť 24 zhodných trojuholníkov, pričom náš lichobežník $ABNO$ je tvorený práve piatimi z nich, a teda tvorí 5/24 obsahu šesťuholníka.

Úloha 10:

Prirodzené číslo n je trojciferné a súčet jeho cifier je 11. Ak zapíšeme cifry tohto čísla v opačnom poradí, tak dostaneme číslo, ktoré je o 297 menšie než číslo n. Ak vydelíme so zvyškom prostrednú cifru čísla n súčtom jeho krajných cifier, dostaneme podiel 1 a zvyšok tiež 1. Určte číslo n.

Výsledok: 461

Riešenie:

Označme si naše číslo n ako $\overline{abc}$ (teda prvá cifra je a, druhá b a tretia c). Zo zadania vieme, že $b : (a + c) = 1, \text{zv.}1$, teda $1 \cdot (a + c) + 1 = b$ a to vieme upraviť na tvar $a + c + 1 = b$. Teraz vieme k obom stranám pripočítať b a dostaneme $a + b + c + 1 = b + b$. A keďže ciferný súčet čísla n je 11, čiže $a + b + c = 11$, tak po dosadení dostaneme $11 + 1 = 2 \cdot b$, a teda $b = 6$. A ešte vieme, že $a + c = 5$.

Zo zadania tiež vieme, že $\overline{c6a} + 297 = \overline{a6c}$. Postupne to upravíme:

$$\begin{aligned}
\overline{c6a} + 297 - \overline{a6c} &= 0, \\
100 \cdot c + 10 \cdot 6 + 1 \cdot a - 100 \cdot a - 10 \cdot 6 - 1 \cdot c + 297 &= 0, \\
99 \cdot c - 99 \cdot a + 297 &= 0, \\
c - a + 3 &= 0, \\
c + 3 &= a, \\
c + a + 3 &= 2 \cdot a.
\end{aligned}$$

No a keďže $a + c = 5$, tak po dosadení dostaneme $5 + 3 = 2 \cdot a$, a teda $a = 4$, $c = 1$.

Samozrejme, jednoduchou skúškou overíme, či číslo vyhovuje obom podmienkam zo zadania. Keďže vyhovuje, tak máme riešenie, a to $n = 461$.

Úloha 11:

Matúš jedol čipsy. V prvý deň zjedol 1 čips. Druhý deň zjedol 2 čipsy, tretí deň 3 čipsy a tak ďalej. Keď si po niektorom dni povedal, že už nebude jesť čipsy, zistil, že celkový počet čipsov, ktoré zjedol, je trojciferné číslo, ktoré má všetky 3 cifry rovnaké. Koľko čipsov zjedol Matúš?

Výsledok: 666

Riešenie:

Počet čipsov, ktoré Matúš zjedol, je súčet niekoľkých po sebe idúcich čísel. Označme si ich počet n. Súčet n po sebe idúcich čísel vieme spočítať ako $n \cdot (n + 1)/2$. Tento vzorec si môžeme ľahko odvodiť. Ak chceme sčítať po sebe idúce čísla, môžeme spárovať prvé číslo s posledným, druhé s predposledným a tak ďalej. Každá z dvojíc bude mať súčet $(n + 1)$ a bude ich $n/2$. Keďže Matúš zjedol dokopy trojciferný počet čipsov, ktorý má všetky cifry rovnaké, tak počet čipsov, ktoré zjedol, je určite deliteľný 111. Prvočíselný rozklad 111 je $3 \cdot 37$. Z toho vyplýva, že jedno z čísel n a $(n+1)$ musí byť deliteľné 37. Dokonca jedno z tých čísel musí byť 37, ak by totiž bolo ešte niečím prenásobené, tak súčin tých čísel nebude trojciferné číslo. Takže teraz máme dve možnosti, buď je 37 n, alebo $n+1$. My však ešte vieme, že to druhé číslo musí byť deliteľné 3, a to spĺňa iba 36. Teraz ešte overíme, či tieto čísla skutočne vyhovujú.

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$$

Úloha 12:

Na párty bolo n ľudí, ktorí sa všetci spoznali. Števko nikoho pred párty nepoznal. Keďže prišiel neskoro, tak počas večera stihol spoznať len niekoľko z prítomných. Na konci párty si podali ruky všetci, ktorí sa navzájom poznali. Ak si ruku potriaslo 68 dvojíc, koľko ľudí na párty spoznal Števko?

Výsledok: 2

Riešenie:

Na to, aby sme vedeli, s koľkými ľuďmi sa Števko skamarátil, musíme zistiť, koľko ľudí tam bolo okrem neho. Označme si ich počet n. Každý si podal ruku s $n - 1$ ľuďmi, ale keby sme to len vynásobili, tak by sme každé podanie rúk zarátali dvakrát, čiže to treba ešte vydeliť dvomi. Teda medzi nimi prebehlo $n \cdot (n - 1)/2$ podaní rúk.

Števko sa skamarátil s najviac n ľuďmi, označme si ich počet k. Teda celkový počet podaní rúk je

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2} + k = 68.$$

Keď rovnicu upravíme, tak zistíme, že $n \cdot (n - 1) + 2k = 136$, teda, že hľadáme súčin dvoch po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorý je nanajvýš 136. Najväčším takým súčinom je $11 \cdot 12 = 132$.

V takom prípade je $2k = 4$, a teda $k = 2$. Ešte musíme skontrolovať či úloha nemá viac riešení. Druhým najväčším súčinom je $10 \cdot 11 = 110$, vtedy $2k = 26$, a teda $k = 13$, lenže to znamená, že $k > n$. Takže jediným riešením úlohy je, že Števko si podal ruku s dvoma ľuďmi.

Úloha 13:

Majme kocku, ktorá má napísané čísla na každej svojej hrane a v niektorých vrcholoch (nie nutne v každom). Pre každú z 12 hrán vypočítame jej *hodnotu* ako súčet čísla na tejto hrane a čísel vo vrcholoch danej hrany. Dostali sme takto všetky čísla od 1 do 12 v nejakom poradí. Súčet úplne všetkých čísel, ktoré sa na kocke nachádzajú, je 50. Aký je súčet čísel vo vrcholoch kocky?

Výsledok: 14

Riešenie:

Z každého vrchola kocky vychádzajú presne tri hrany. To znamená, že každé číslo, ktoré je vo vrchole, sme zarátali do troch *hodnôt* hrán, keďže patrí trom hranám. Číslo, ktoré nie je vo vrchole, sme zarátali len do jednej z *hodnôt*. Z toho vieme, že keď zrátame dokopy všetky *hodnoty*, tak čísla vo vrcholoch sú tam zarátané po tri razy a ostatné čísla len jedenkrát každé. Súčet týchto *hodnôt* je súčet čísel od 1 do 12, čo je 78. Súčet všetkých čísel na kocke je 50, keď to odčítame, tak odčítame každé číslo raz. Keďže čísla vo vrcholoch boli zarátané každé trikrát, tak po odčítaní bude každé zarátané ešte dvakrát. Ostatné čísla boli zarátané každé iba raz, teda po odčítaní nebudú zarátané vôbec. Preto $78 - 50 = 28$ je dvojnásobok súčtu čísel vo vrcholoch kocky. Súčet čísel vo vrcholoch kocky je teda $28 : 2 = 14$.

Úloha 14:

Nájdite dve najmenšie za sebou idúce prirodzené čísla, ktoré majú vo svojom prvočíselnom rozklade práve 4 prvočísla.

Výsledok: 135 a 136

Riešenie:

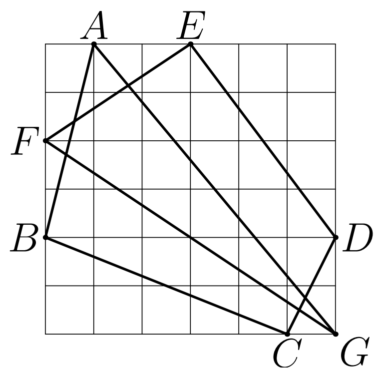
Keďže hľadáme dve po sebe idúce čísla, tak to znamená, že jedno z nich bude párne a druhé nepárne. Teda jedno z hľadaných čísel vo svojom prvočíselnom rozklade nemá dvojku. Skúsme nájsť najmenšie nepárne číslo, ktoré má vo svojom prvočíselnom rozklade práve štyri prvočísla. Najmenšie nepárne prvočíslo je tri, tak použime štyri trojky: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Ak by jedno z čísel bolo 81, tak to druhé musí byť o jedna menšie alebo o jedna väčšie, teda 80 alebo 82. Rozložme ich na prvočísla: $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, $82 = 2 \cdot 41$. Vidíme, že ani jedno z týchto čísel nevyhovuje, lebo nemá práve štyri prvočísla vo svojom prvočíselnom rozklade.

Nájdime druhé najmenšie nepárne číslo zložené zo štyroch prvočísel. Jednu trojku musíme vymeniť za druhé najmenšie nepárne prvočíslo a to je päť: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 135$. Vyskúšajme, či bude vyhovovať 134 alebo 136: $134 = 2 \cdot 67$, $136 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$. Vidíme, že 134 nevyhovuje, ale 136 vyhovuje. Teda 135 a 136 sú riešením.

Úloha 15:

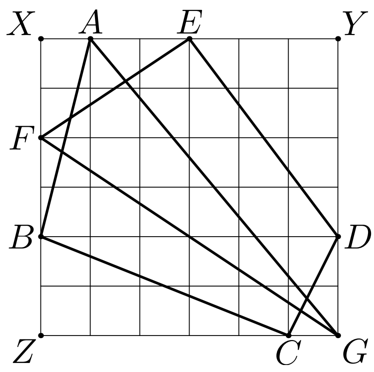
Obdĺžnik na obrázku pozostáva z 36 štvorcov. Na jeho stranách (pozri obrázok) sú vyznačené body A, B, C, D, E, F a G. Aký je súčet konvexných uhlov (konvexný uhol je taký uhol, ktorý je menší ako 180°)

$|\sphericalangle GAB|+|\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle BCD|+|\sphericalangle CDE|+|\sphericalangle DEF|+|\sphericalangle EFG|+|\sphericalangle FGA|$?



Výsledok: 540°

Riešenie:



Označme si vrcholy štvorčekovej siete X, Y a Z tak, ako je to na obrázku, a pozrime sa na prvý uhol zo súčtu v zadaní, uhol GAB. Jeho vrchol sa nachádza na strane hracej plochy a spolu s uhlami XAB a YAG tvorí priamy uhol, a preto sa jeho veľkosť dá napísať ako

$$|\sphericalangle GAB| = 180^\circ - (|\sphericalangle YAG| + |\sphericalangle XAB|).$$

Rovnakú úvahu môžeme zopakovať pre ďalších päť uhlov zo súčtu v zadaní (všetky uhly, ktoré ležia na stranách štvorčekovej siete) a dostaneme

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle ABC| &= 180^\circ - (|\sphericalangle XBA| + |\sphericalangle ZBC|),\\
|\sphericalangle BCD| &= 180^\circ - (|\sphericalangle ZCB| + |\sphericalangle GCD|),\\
|\sphericalangle CDE| &= 180^\circ - (|\sphericalangle GDC| + |\sphericalangle YDE|),\\
|\sphericalangle DEF| &= 180^\circ - (|\sphericalangle YED| + |\sphericalangle XEF|),\\
|\sphericalangle EFG| &= 180^\circ - (|\sphericalangle XFE| + |\sphericalangle ZFG|).
\end{aligned}$$

Posledný uhol je trochu odlišný, jeho vrchol sa totiž nachádza vo vrchole štvorčekovej siete, vďaka čomu platí

$$|\sphericalangle FGA| = 90^\circ - (|\sphericalangle ZGF| + |\sphericalangle YGA|).$$

Po sčítaní všetkých siedmich rovníc dostaneme súčet zo zadania na ľavej strane a na pravej strane dostaneme $6 \cdot 180^\circ + 90^\circ = 1170^\circ$, od ktorých odpočítame 14 uhlov. Tu si ale môžeme všimnúť, že tieto uhly sa dajú spárovať tak, že každá dvojica bude predstavovať dva (nie pravé) uhly v pravouhlom trojuholníku, a teda ich súčet bude 90°:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle XAB| + |\sphericalangle XBA| &= 90^\circ\\
|\sphericalangle ZBC| + |\sphericalangle ZCB| &= 90^\circ\\
|\sphericalangle GCD| + |\sphericalangle GDC| &= 90^\circ\\
|\sphericalangle YDE| + |\sphericalangle YED| &= 90^\circ\\
|\sphericalangle XEF| + |\sphericalangle XFE| &= 90^\circ\\
|\sphericalangle ZFG| + |\sphericalangle ZGF| &= 90^\circ\\
|\sphericalangle YGA| + |\sphericalangle YAG| &= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Preto dostávame, že súčet uhlov zo zadania je $1170^\circ - 7 \cdot 90^\circ = 540^\circ$.

Úloha 16:

Z kocky sme odsekli štvorsten $ABCD$ tak, že A bol vrcholom pôvodnej kocky a B, C, D boli vrcholy na kocke, ktoré susedia s A. Aby sme ich vedeli rozoznať, štyri steny štvorstena sme ofarbili rôznymi farbami. Potom sme položili štvorsten na rovnú podložku stenou ABC. Teraz ho prevalíme okolo hrany AB, potom AD, potom AC a tento postup opakujeme, až kým neskončíme v pôvodnej polohe (na pôvodnom mieste v pôvodnej orientácii). Koľkokrát prevalíme štvorsten?

Výsledok: 12

Riešenie:

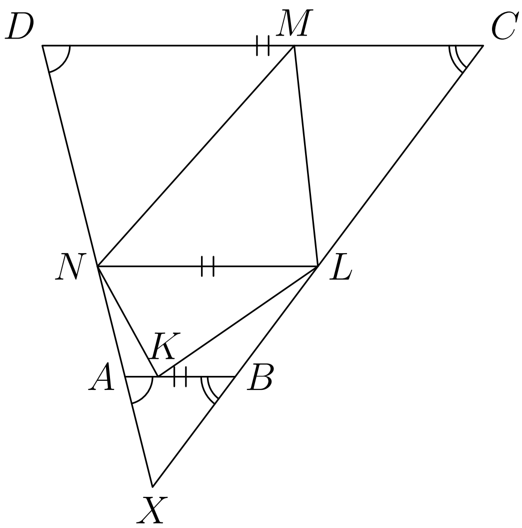
Všimnime si, že hrany, cez ktoré preklápame štvorsten, sú všetky rovnaké ako v pôvodnej kocke. To znamená, že to, či tam zvyšok kocky je alebo nie je, nezasahuje do toho, ako sa kocka preklápa. Takže si celú úlohu môžeme predstaviť tak, že máme celú kocku a preklápame ju okolo jedného vrchola. Keď kocku preklápame okolo jedného vrchola, tak kocka spraví štyri preklopenia, kým sa dostane na rovnaké miesto. Nebude však v rovnakej polohe (farba, ktorou leží na zemi, sa nebude zhodovať), pretože kocku preklápame len cez tri strany, zakiaľ preklopenia sme spravili štyri. Označme si steny od jeden do tri, v takom poradí, v akom na nich kocka stojí, keď ju preklápame. Na začiatku stojí na stene 1. Zo steny 1 sa preklopí na stenu 2, odtiaľ na stenu 3 a potom opäť na stenu 1 a tak ďalej. Po štyroch preklopeniach je teda kocka na pôvodnom mieste, ale nestojí na stene 1 ako na začiatku, ale na stene 2. Po ďalších štyroch preklopeniach je kocka opäť na pôvodnom mieste a tentokrát stojí na stene 3. Po dvanástich preklopeniach je kocka opäť na pôvodnom mieste a konečne aj stojí na stene číslo 1, a teda je aj v pôvodnej orientácii.

Úloha 17:

Máme daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD, ktoré sú v pomere $1 : 4$. Na stranách AB, BC, CD, DA majme postupne body K, L, M, N také, že $7|AK| = 3|KB|$, $2|BL| = |LC|$, $4|CM| = 3|MD|$ a $2|AN| = |ND|$. Akú časť lichobežníka $ABCD$ tvorí štvoruholník $KLMN$?

Výsledok: $2/5$

Riešenie:



Na začiatok rozdelíme štvoruholník $KLMN$ vyznačením úsečky LN na dva trojuholníky. Predĺžime si strany AD a BC, ktorých priesečník označíme X.

O trojuholníkoch ABX a DCX vieme povedať, že sú podobné podľa vety *uu* (uhol uhol). Keďže sú základne lichobežníka navzájom rovnobežné a obe sú preťaté priamkou AD resp. BC, vieme, že uhly XAB a XDC sú súhlasné, a teda rovnaké, a to isté platí o uhloch XBA a XCD. Keďže sú v oboch trojuholníkoch zhodné, vieme, že tieto trojuholníky sú podobné.

Z podobnosti vyplýva, že strana AB je k strane CD v rovnakom pomere ako AX s XD a XB s XC. Keďže je pomer strán AB k CD $1 : 4$, v takom pomere budú aj zvyšné dve dvojice. Potom ak AX je 1 diel, AD sú 3 diely. Rovnako XB a BC.

Bod N delí úsečku AD v pomere $1 : 2$, takže zo spomínaných 3 dielov bude mať AN jeden a ND dva. Potom je ale N v strede XD. Rovnakým postupom prídeme na to, že bod L je v strede úsečky XC.

Keďže sú N aj L v strede strán trojuholníka CDX, spolu tvoria strednú priečku rovnobežnú s CD a s polovičnou dĺžkou.

Keďže chceme vyrátať obsah štvoruholníka $KLMN$, ktorý sme si rozdelili na dva trojuholníky úsečkou LN, na výpočet ich obsahu potrebujeme výšku na túto základňu. Keďže je úsečka LN rovnobežná s DC, tak je kolmá na výšku lichobežníka. Máme dva rôzne trojuholníky, KLN a LMN, pričom súčet ich výšok je rovný výške lichobežníka. Z toho nám vyplýva, že obsah oboch trojuholníkov bude rovný $|LN| \cdot v/2$.

Obsah lichobežníka vyrátame ako $(|AB| + |CD|) \cdot v/2$. Keďže je AB štyrikrát kratšia ako CD, tak si $|AB|$ označíme x a $|CD|$ vyjadríme ako $4x$. Po nahradení vo vzorci dostaneme, že obsah lichobežníka je $(x + 4x) \cdot v/2 = 5xv/2$. Zistili sme, že obsah štvoruholníka $KLMN$ je rovný $|LN| \cdot v/2$. O LN sme rozhodli, že je strednou priečkou ku CD, a teda je dva razy kratšia. Keďže $|CD| = 4x$, tak $|LN| = 2x$. Po nahradení vo vzorci dostaneme, že obsah štvoruholníka $KLMN$ je $2xv/2 = xv$.

Chceme vedieť, akú časť z celého lichobežníka zaberá, preto dáme tento obsah s obsahom lichobežníka do zlomku. Úpravou sa dopracujeme k výslednej hodnote.

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{xv}{\frac{5xv}{2}} = \frac{2xv}{5xv} = \frac{2}{5}$$

Úloha 18:

Keď na natieraní steny spolupracujú Peťo a Roman, trvá im to 4 hodiny. Keď spolupracujú Peťo a Dano, zaberie to 6 hodín. Pri spoločnom úsilí Romana a Dana to trvá až 12 hodín. Za aký čas natrú stenu postupne dvomi rôznymi nátermi, ak prvý bude nanášať sám Peťo a druhý sám Roman?

Výsledok: 18

Riešenie:

Máme informácie o tom, za aký čas vykoná prácu každá z možných dvojíc z našich troch natieračov. Na začiatok si zistíme, akú časť steny natrú za hodinu. Pre každú dvojicu si vyjadríme, koľko plochy steny natrie za jednu hodinu.

Vieme, že Peťovi a Romanovi celé natretie trvá 4 hodiny, teda za 1 hodinu natrú $1/4$ steny. Peťovi a Danovi trvá celé natretie 6 hodín, čiže za hodinu natrú $1/6$ steny. Romanovi a Danovi trvá natretie celej steny 12 hodín, a tak za hodinu natrú $1/12$ steny.

Keď si upravíme tieto zlomky na najmenšieho spoločného menovateľa, čo je v tomto prípade 12, tak dostaneme $1/4 = 3/12$, $1/6 = 2/12$, $1/12 = 1/12$. Keď tieto zlomky sčítame, tak dostaneme hodnotu, ktorá nám dáva obsah steny, ktorú zvládnu natrieť dvaja Peťovia, dvaja Romanovia a dvaja Danovia (keďže sme každého zarátali dvakrát):

$$\frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Zistili sme, že ak by stenu natierali dvaja ľudia s rýchlosťou Peťa, dvaja s rýchlosťou Romana a dvaja s rýchlosťou Dana, natreli by za hodinu $1/2$ steny. Keďže my máme každého iba raz, odoberieme jedného Peťa, jedného Romana aj jedného Dana, a teda jednému Peťovi, jednému Romanovi a jednému Danovi to bude trvať dvakrát dlhšie, takže $1/2$ steny natrú za dve hodiny, z čoho vyplýva, že za hodinu natrú $1/4$ steny.

Všimnime si, že všetci traja natrú za hodinu rovnakú časť steny, ako natrie len Peťo s Romanom. Z toho vyplýva, že Dano nerobí nič a k natieraniu neprispieva. Z toho je už zjavné, že časy natierania, v ktorých je zapojený Dano, sú rovnaké pre samotných natieračov, s ktorými je vo dvojici. Teda ak Peťo a Dano spolu natrú stenu za 6 hodín, sám Peťo ju natrie za 6 hodín. Ak natierajú Dano a Roman, ktorým to trvá 12 hodín, vieme, že Roman ju sám natrie za 12 hodín.

Teraz tieto dve hodnoty už len sčítame a dostávame, že nanášanie dvoch náterov im potrvá $6+12 = 18$ hodín.

Úloha 19:

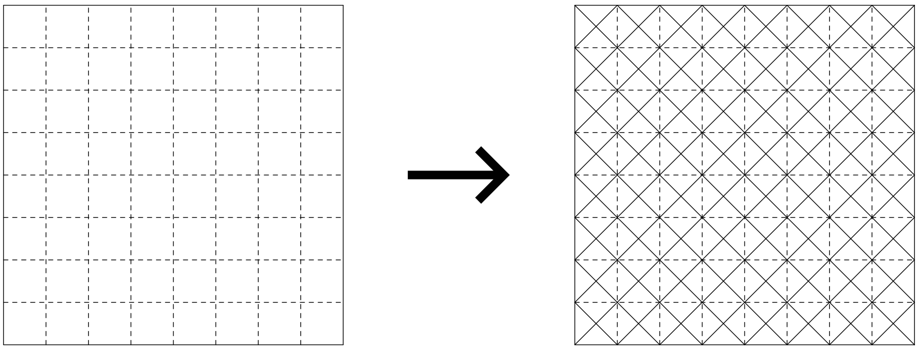
Máme papier v tvare štvorca veľkosti 8×8. Preložíme ho na polovicu, a potom znova na polovicu, aby sme dostali štvorec 4×4. Toto zopakujeme ešte dvakrát, až dostaneme štvorec 1×1. Ten potom rozstrihneme pozdĺž oboch uhlopriečok. Koľko kusov papiera dostaneme?

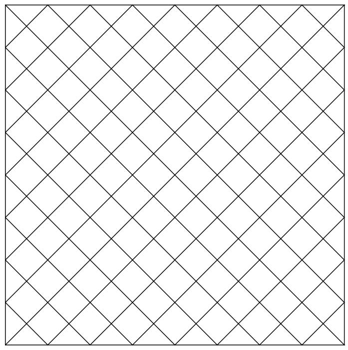
Výsledok: 144

Riešenie:

Predstavme si, že papier preložíme podľa zadania a potom ho znova rozprestrieme. Keďže sme ho preložili trikrát v oboch smeroch, výsledkom bude mriežka 8×8.

Teraz si uvedomme, že keď sme poskladaný papier rozstrihli po oboch uhlopriečkach, rozstrihli sme každý z týchto 64 štvorčekov po oboch jeho uhlopriečkach. Rozprestrený papier by aj s čiarami, po ktorých sme strihali, vyzeral ako na obrázku.





Teraz si už stačí iba odmyslieť zvislé a vodorovné čiary, po ktorých sme nestrihali, teda neoddeľujú kusy papiera, a zrátať všetky kusy papiera:

Na obrázku vidíme, že kusy papiera sú usporiadané do riadkov. Sú tam dva riadky pozostávajúce z ôsmich trojuholníkov (prvý a posledný), osem riadkov pozostávajúcich z dvoch trojuholníkov a siedmich štvorcov, čo je spolu 9 kusov papiera, a sedem riadkov pozostávajúcich z ôsmich štvorcov. Spolu je to teda

$$2 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + 7 \cdot 8 = 16 + 72 + 56 = 144.$$

Úloha 20:

Kamión sa pomaly pohybuje po parkovisku (smer a rýchlosť má stále rovnakú). Dano chce zistiť, aký dlhý je kamión. Preto sa postavil ku koncu kamióna a začal kráčať v smere jazdy. Dano zistil, že potrebuje urobiť 112 krokov na to, aby sa dostal na začiatok kamiónu. Keď už bol na začiatku, otočil sa a išiel späť na koniec. Zistil, že potrebuje 16 krokov na to, aby sa dostal na koniec kamiónu. Aký je dlhý kamión, ak Dano kráča stále rovnakou rýchlosťou a každý krok má dĺžku pol metra?

Výsledok: 14 metrov

Riešenie:

Nech kamión má dĺžku x. Pokúsime sa túto dĺžku vyjadriť v počte krokov. Vieme, že Dano potreboval prejsť 112 krokov na to, aby sa dostal na začiatok kamiónu. To znamená, že kamión prešiel za rovnaký čas $112 - x$ krokov. Cestou späť Dano prejde 16 krokov, zakiaľ kamión prejde $x - 16$ krokov. Preto 16 krokov Dano prejde za rovnaký čas, ako kamión prejde $x - 16$ krokov. Pozrime sa teraz na sedemnásobok tejto vzdialenosti. Dano prejde $7 \cdot 16 = 112$ krokov za rovnaký čas, ako kamión prejde $7 \cdot (x - 16)$ krokov. Na začiatku sme ale ukázali, že 112 krokov Dano prejde rovnako rýchlo, ako kamión prejde $112 - x$ krokov. Preto musí platiť

$$7x - 112 = 112 - x,$$

a preto $x = 224/8 = 28$. Kamión je preto dlhý 28 krokov, čo je 14 metrov.

Hádanky

Hádanka 1:

Poznám jeden domček. V ňom päť bratov býva. Každý sa vo svojej izbičke ukrýva. Čo je to?

Výsledok: rukavica

Hádanka 2:

Čo môžeš držať v pravej ruke, ale v ľavej nie?

Výsledok: ľavú dlaň, ľavý lakeť

Hádanka 3:

Ktorý rak sa utopil?

Výsledok: vrak

Hádanka 4:

Prečo zjedia biele ovce viac ako čierne?

Výsledok: lebo ich je viac

Hádanka 5:

Čo ak chceš použiť, musíš zahodiť, ale musíš zobrať späť, keď už to nepotrebuješ?

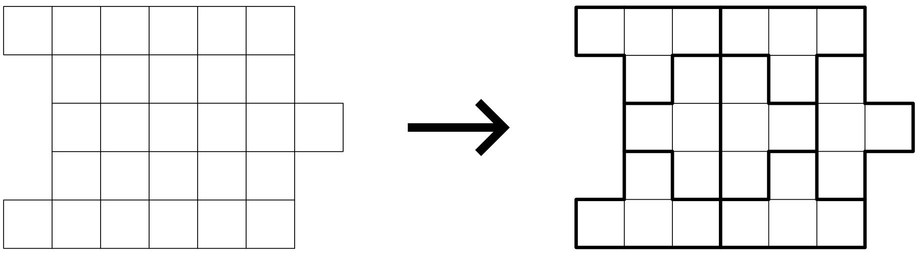
Výsledok: kotva

Hlavolamy

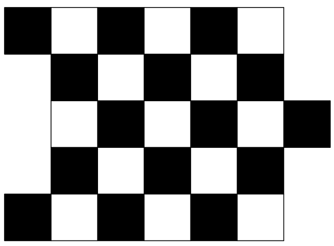
Hlavolam 1:

Rozdeľte obrázok na sedem zhodných častí. Deliť sa smie len pozdĺž strán jednotlivých štvorcov.

Výsledok:

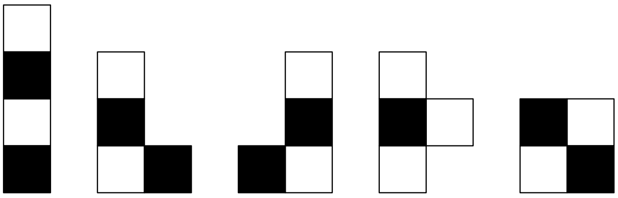


Riešenie:



Keď si spočítame štvorčeky, zistíme, že ich je 28. Preto, keď chceme rozdeliť útvar na 7 zhodných častí, musí mať každá z nich 4 štvorčeky. Existuje 5 rôznych tvarov vytvorených zo 4 štvorčekov. Keď si ofarbíme celý útvar ako na obrázku vidíme, že čiernych políčok je 15 zatiaľ čo bielych je 13.

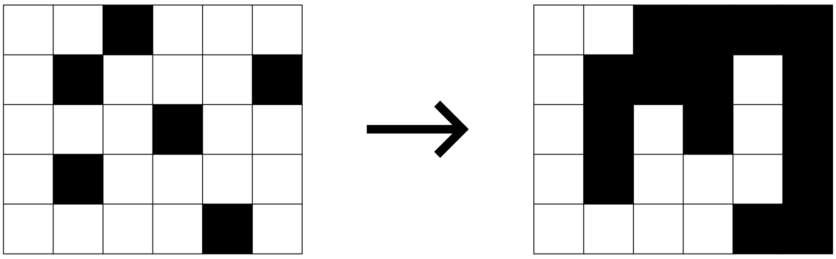
Z 5 možných útvarov, na ktoré vieme obrázok rozdeliť, sú 4 také, že zaberú 2 čierne a 2 biele políčka bez ohľadu na to, kam budú položené. Teda vidíme, že tieto nemôžu byť riešením úlohy, lebo by obrázok musel mať rovnako veľa čiernych a bielych políčok, čo nemá. Musíme preto použiť štvrtý útvar, ktorým vieme obrázok podľa zadania rozdeliť.



Hlavolam 2:

Doplňte čierne políčka tak, aby zafarbená a nezafarbená časť obrázku tvorili dva zhodné súvislé obrazce.

Výsledok:



Riešenie:

Ak majú byť oba útvary rovnaké, tak je dobrý nápad políčka farbiť tak, aby boli políčka rôznych farieb stredovo súmerné podľa stredu obdĺžnika (teda ak jeden tvar otočíme o 180° okolo stredu obdĺžnika, tak presne prekryje ten druhý, napríklad ľavý horný roh sa prenesie do pravého dolného). Takto vieme, ktorých 6 políčok bude určite bielych (tie, ktoré sú stredovo súmerné s čiernymi v zadaní). Potom určujeme, ktoré políčka sú určite biele alebo čierne, tak, aby sme docielili súvislosť oboch útvarov a zároveň dodržiavali stredovú súmernosť.

Hlavolam 3:

Rôzne písmená predstavujú rozdielne prirodzené čísla. Každé číslo na okraji označuje súčet v príslušnom riadku či stĺpci. Aké číslo patrí na miesto otáznika?

K	H	H	6
B	K	V	11
P	V	V	?
16	7	5	

Výsledok: 11

Riešenie:

Vidíme, že súčet čísel vo všetkých stĺpcoch je dokopy $16 + 7 + 5 = 28$. Keďže do tohto súčtu započítavame každé číslo práve raz, tak aj súčet riadkov musí byť 28, lebo tam započítavame každé číslo taktiež práve raz. A preto je súčet čísel v poslednom riadku $28 - 11 - 6 = 11$.

Úlohu, samozrejme, ide vyriešiť aj priamo vypočítaním jednotlivých písmen – toto riešenie si tiež ukážeme.

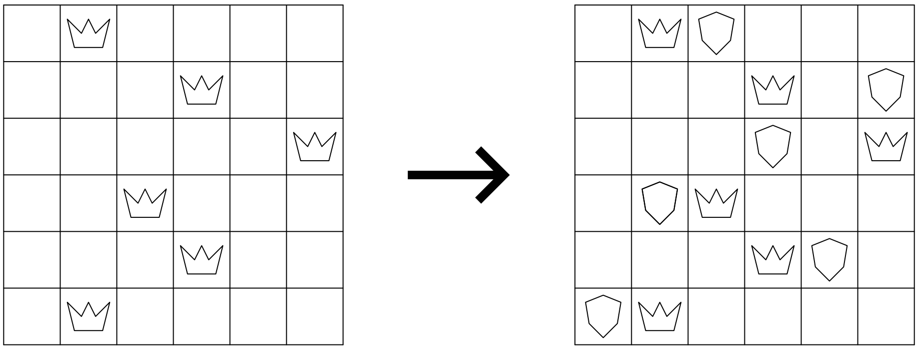
Pozrieme sa na prvý riadok tabuľky. Z neho vieme, že $K + H + H = 6$. Z toho vyplýva, že H nemôže byť väčšie ako 3. Ak by $H = 3$, tak potom by $K = 0$, čo nie je prirodzené číslo. Ak by $H = 2$, tak potom aj $K = 2$, čo opäť nie je možné, keďže všetky čísla majú byť rôzne. Teda vieme, že $H = 1$.

Potom $K = 4$. Pozrime sa teraz na tretí stĺpec, $H + V + V = 5$. Keďže $H = 1$, tak potom $V = 2$. Pozrime sa na druhý riadok. Vidíme, že $B + K + V = 11$. Vieme, že $K = 4$ a $V = 2$, teda $B = 5$. V prvom stĺpci vidíme, že $K + B + P = 16$, a, keďže $B = 5$ a $K = 4$, $P = 7$. Už sa vieme pozrieť na tretí riadok, ktorého súčet je teda $7 + 2 + 2 = 11$.

Hlavolam 4:

Poukladajte na políčka plochy strážcov tak, aby každá korunka mala priamo nad, pod alebo vedľa seba aspoň jedného strážcu a zároveň v každom riadku a stĺpci sa nachádzal práve jeden strážca.

Výsledok:



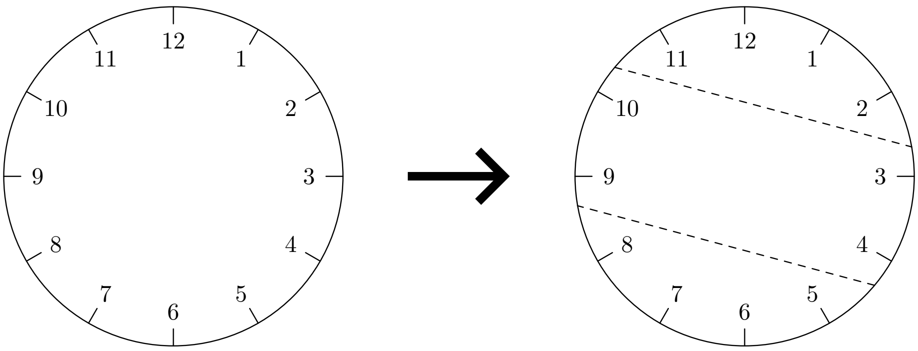
Riešenie:

Úloha má viacero možných riešení, toto je jedno z nich.

Hlavolam 5:

Rozdeľte ciferník hodín dvoma tetivami, ktoré sa nepretínajú a nekončia v žiadnom z dvanástich čísel, na tri oblasti tak, aby súčet čísel v každej oblasti bol rovnaký.
Poznámka: Tetiva je úsečka spájajúca dva rôzne body na kružnici.

Výsledok:



Riešenie:

Vieme, že súčet čísel od 1 po 12 je 78. Tento súčet máme rozdeliť na 3 rovnaké diely, teda súčet čísel v jednom diele bude 26. Vieme taktiež, že dve z 3 častí, na ktoré ciferník delíme, budú po sebe idúce rady čísel a jedna časť bude rozdelená na 2 úseky. Teda hľadáme najprv tie po sebe idúce a postupne dospejeme k tomuto riešeniu.

Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2018 sa koná už 18. ročník tejto súťaže.

Súťaž trvá (čarovných) 66 minút. Súťažiaci zo základných škôl (7. – 9. ročník) a príslušných tried osemročných gymnázií (sekunda až kvarta) súťažia v štvorčlenných družstvách. Družstvá dostanú na začiatku 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Úlohy sú zoradené približne podľa náročnosti, pričom žiaci ich môžu riešiť v ľubovoľnom poradí. Družstvá získavajú body za jednotlivé úlohy, hlavolamy a hádanky podľa ročníkov súťažiacich v družstve, a to podľa tabuľky:

Ročník				Správny výsledok			Nesprávny výsledok	Neodovzdané riešenie
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	hlavolam	hádanka		
7	7	7	7	4,20	2	1	-1	0
7	7	7	8	4,05	2	1	-1	0
7	7	7	9	3,90	2	1	-1	0
7	7	8	8	3,90	2	1	-1	0
7	7	8	9	3,75	2	1	-1	0
7	7	9	9	3,60	2	1	-1	0
7	8	8	8	3,75	2	1	-1	0
7	8	8	9	3,60	2	1	-1	0
7	8	9	9	3,45	2	1	-1	0
7	9	9	9	3,30	2	1	-1	0
8	8	8	8	3,60	2	1	-1	0
8	8	8	9	3,45	2	1	-1	0
8	8	9	9	3,30	2	1	-1	0
8	9	9	9	3,15	2	1	-1	0
9	9	9	9	3,00	2	1	-1	0

Zadania starších ročníkov nájdete na `matik.strom.sk/lomihlav`.

autori:	Jakub Genči, Florián Hatala, Peter Kovács, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzana Ontkovičová, Roman Staňo, Žaneta Semanišinová
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Viktória Brezinová, Filip Csonka, Matej Hanus, Tomáš Chovančák, Tomáš Kocák, Michal Masrna, Martin Mihálik, Ján Richnavský, Martin Spišák, Martin Števko, Timea Szöllősová
názov:	**Lomihlav – 30. 11. 2018**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`matik.strom.sk/lomihlav` `www.itakademia.sk`

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk