Lomihlav

Košice, 9.12.2022

Úlohy

Úloha 1:

Eidam prečíta prvých 10 strán svojej knihy za 10 minút a každú ďalšiu stranu prečíta za 40 sekúnd. Koľko celých strán zvládne Eidam prečítať za jednu hodinu?

Výsledok: 85

Riešenie:

Vieme, že Eidam prečíta prvých 10 strán svojej knihy za 10 minút. Keďže 1 hodina má 60 minút, tak sa teraz poďme pozrieť na to, koľko strán zvládne prečítať za zvyšných $60 - 10 = 50$ minút.

1 minúta má 60 sekúnd, potom 50 minút je $50 \cdot 60 = 3000$ sekúnd. Každú stranu prečíta za 40 sekúnd, teda za 3000 sekúnd prečíta $3000 : 40 = 75$ strán.

K týmto 75 stranám však ešte musíme pripočítať 10 strán, ktoré prečítal za prvých 10 minút. Dokopy prečítal $75 + 10 = 85$ strán.

Úloha 2:

Gouda nakúpil syr za 37 eur. Zaplatil samými päťeurovkami a boli mu vydané len dvojeurovky. Koľko najmenej dvojeuroviek mu bolo vydaných?

Výsledok: 4

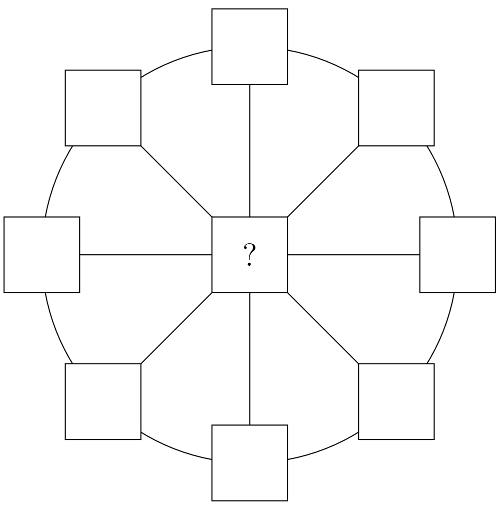
Riešenie:

Aby Gouda dostal naspäť čo najmenej dvojeuroviek, aj výdavok musí byť čo najmenší. Ak platil iba päťeurovkami, musel zaplatiť aspoň 40 eur, inak by nezaplatil dosť. Výdavok by v tomto prípade bol $40 - 37 = 3$ eurá, čo je nepárne číslo. Keďže je nepárne, nedá sa poskladať zo samých dvojeuroviek, a teda Gouda nemohol zaplatiť iba 40 eur.

Pozrime sa na druhú najmenšiu cenu, ktorú mohol Gouda zaplatiť, a to 45 eur. Výdavok by v tomto prípade bol $45 - 37 = 8$ eur, čo sa už dá vyskladať zo 4 dvojeuroviek. Gouda teda dostal naspäť 4 dvojeurovky.

Úloha 3:

Ementál chce vpísať do každého políčka v schéme na obrázku kladné celé číslo. Súčet každej trojice čísel na jednej úsečke má byť 13. Súčet ôsmich čísel na obvode má byť 40. Ktoré číslo musí Ementál napísať do políčka v strede?



Výsledok: 3

Riešenie:

Číslo v políčku v strede sa sčítava do každej trojice políčok na jednej úsečke. Vieme o ňom zároveň povedať, že je pre každú trojicu čísel rovnaké. Toto znamená, že súčet čísel v políčkach oproti sebe musí byť tiež rovnaký.

Takéto dvojice políčok máme v schéme 4. Zo zadania vieme, že súčet ôsmich čísel na obvode je 40, a teda súčet týchto štyroch dvojíc políčok je 40 (pripomíname, že súčty všetkých dvojíc sú rovnaké). Z toho vyplýva, že súčet dvoch políčok oproti sebe bude $40 : 4 = 10$.

Súčet krajných políčok úsečky je 10 a súčet všetkých (troch) políčok na jednej (každej) úsečke má byť 13. Číslo v strednom políčku je teda $13 - 10 = 3$.

Úloha 4:

Hmotnosti štyroch syrov na pizzi sú štyri rôzne celé čísla väčšie ako 1. Ich súčin je 210. Aký je ich súčet?

Výsledok: 17

Riešenie:

Najprv si zopakujme niekoľko poznatkov. Prvočíslo je také číslo, ktoré má práve dvoch kladných celých deliteľov – číslo 1 a seba samo (pozor, číslo 1 nie je prvočíslo, má len jedného kladného celého deliteľa). Prvočíselný rozklad (faktorizácia) je rozklad daného čísla na súčin tak, že sa v tomto súčine nachádzajú iba prvočísla (napríklad pre 12 je to $2 \cdot 2 \cdot 3$). Prvočíselný rozklad dostaneme tak, že pôvodné číslo postupne delíme jeho prvočíselnými deliteľmi, až kým nám neostane 1.

Pozrime sa teraz na prvočíselný rozklad čísla 210. Vidíme, že je deliteľné 2 a $210 : 2 = 105$. 2 si zapamätáme a pokračujeme so 105, ktoré je deliteľné 5. $105 : 5 = 21$, nuž si zapamätáme 5 a pokračujeme s 21, ktoré je deliteľné 3. $21 : 3 = 7$. Obe čísla (3 i 7) sú prvočísla a spolu so zapamätanými získame celkový rozklad na prvočísla: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Číslo 210 teda vieme zapísať ako súčin 4 čísel väčších ako 1 iba jedným spôsobom, pretože v jeho prvočíselnom rozklade máme práve 4 rôzne prvočísla. To znamená, že naším výsledkom bude ich súčet $2 + 3 + 5 + 7 = 17$.

Úloha 5:

Priemer obsahu mlieka Parmezána, Čedara a Mozzarelly je 300 ml. Priemer obsahu mlieka Čedara a Parmezána je 290 ml. Koľko ml mlieka obsahuje Mozzarella?

Výsledok: 320

Riešenie:

Aritmetický priemer obsahov mlieka Parmezána, Čedara a Mozarelly počítame ako tretinu ich súčtu. To znamená, že súčet týchto obsahov sa rovná trojnásobku ich priemeru, čiže $3 \cdot 300\,\mathrm{ml} = 900\,\mathrm{ml}$. Podobne, aritmetický priemer obsahov mlieka Čedara a Parmezána je polovica ich súčtu, takže tento súčet je dvojnásobok zadaného priemeru, čo je $2 \cdot 290\,\mathrm{ml} = 580\,\mathrm{ml}$. Keď teraz všetky tri syry obsahujú dokopy 900 ml mlieka a Parmezán a Čedar obsahujú spolu 580 ml mlieka, Mozzarella obsahuje zvyšných $900\,\mathrm{ml} - 580\,\mathrm{ml} = 320\,\mathrm{ml}$.

Úloha 6:

Eidam a Gouda 26 písmenám abecedy postupne priradili 26 po sebe idúcich celých čísel. Vieme, že $E + G + G = 127$. Aká je hodnota písmena Y?

Výsledok: 61

Riešenie:

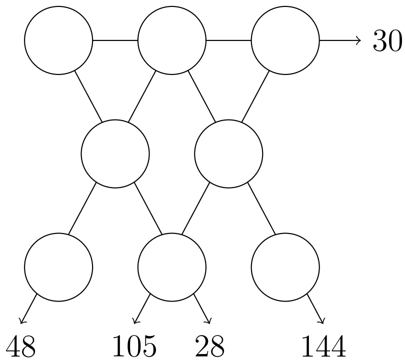
Označme si hodnotu písmena A a. Potom si hodnoty ostatných písmen vieme vyjadriť ako $a +$ vzdialenosť v abecede od písmena A (čiže $B = a + 1$, $C = a + 2$, $D = a + 3$...).

Písmená v rovnici $E + G + G = 127$ si vieme vyjadriť pomocou a: $a + 4 + a + 6 + a + 6 = 127$.

To vieme zjednodušiť na $3a = 111$. Keď 111 následne vydelíme 3 dostaneme 37, čo je a. My potrebujeme Y a vieme, že $Y = a + 24$, odkiaľ $Y = 37 + 24 = 61$.

Úloha 7:

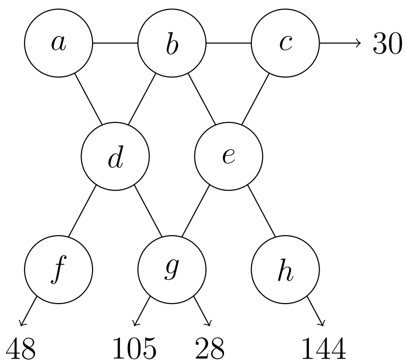
Ementál si vpisuje čísla do svojich dier (ako na obrázku). Do nich treba doplniť čísla od 1 do 8 (každé práve raz) tak, aby platilo, že súčin čísel v troch dierach na úsečke je taký, aký je napísaný pri šípke na konci úsečky. Ako to má urobiť?



Výsledok: po riadkoch 1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 8

Riešenie:

Na to, aby mohol obsahovať nejaký súčin nejaké z čísel 1 až 8, musí byť týmto číslom deliteľný. Nazvime po riadkoch krúžky a až h.



Môžeme si všimnúť, že práve dva zo súčinov sú deliteľné piatimi, tými sú 30 a 105. Preto bude číslo 5 v krúžku, ktorý majú tieto súčiny spoločné, teda v krúžku c. Podobne to bude aj s číslom 7. Len dva súčiny sú deliteľné 7, a to 105 a 28, čiže číslo 7 je v krúžku g.

Čo sa týka súčinu 105, tak už vieme, že sú v ňom obsiahnuté čísla 7 a 5. Tretí činiteľ je e a $e \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Z toho vieme dopočítať, že $e = 105 : (5 \cdot 7) = 3$.

Súčin 30 môžeme dostať iba ako $1 \cdot 5 \cdot 6$ alebo $2 \cdot 3 \cdot 5$. Pretože $e = 3$, nemôže ani a, ani b nadobúdať hodnotu 3, a teda súčin 30 musíme dostať ako $1 \cdot 5 \cdot 6$. Vieme, že $c = 5$. Môžeme si všimnúť, že $b = 6$, pretože keby $a = 6$, tak by súčin 28 $(a \cdot d \cdot g)$ musel byť deliteľný 6, čo nie je. To znamená, že $b = 6$ a $a = 1$.

Vieme, že $a \cdot d \cdot g = 28$. Keďže $a = 1$ a $g = 7$, tak $d = 28 : (1 \cdot 7) = 4$. Z toho vieme dopočítať f, pretože $b \cdot d \cdot f = 48$, $b = 6$ a $d = 4$. Teraz $f = 48 : (4 \cdot 6) = 2$. Rovnako $b \cdot e \cdot h = 144$, pričom vieme, že $b = 6$ a $e = 3$. Hodnotu h dopočítame ako $144 : (3 \cdot 6) = 8$.

Doplnené čísla, ktoré predstavujú jednotlivé hodnoty a, b, c, d, e, f, g, h, sú postupne 1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 8.

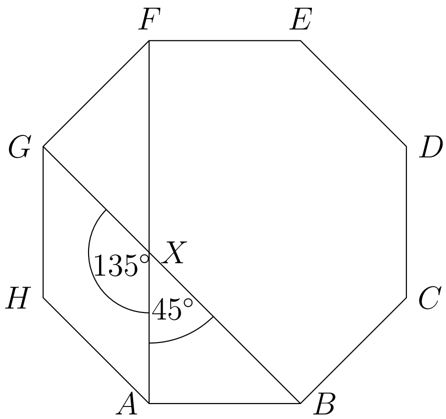
Úloha 8:

Parmezán má tvar pravidelného osemuholníka $ABCDEFGH$. Aký veľký je menší z uhlov, ktoré zvierajú úsečky AF a GB?

Výsledok: 45°

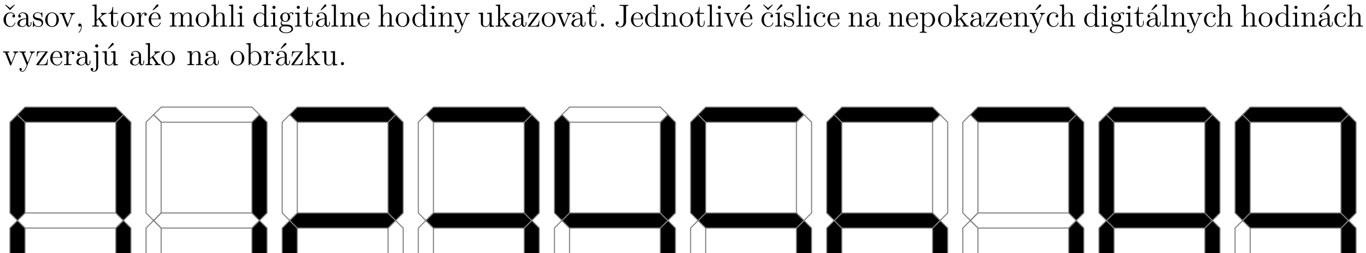
Riešenie:

Najprv si zistíme veľkosť uhla AHG. Tento uhol je vnútorným uhlom pravidelného osemuholníka, takže ho vieme dorátať pomocou vzorca $(n - 2) \cdot 180° : n$, kde n je počet vrcholov daného pravidelného mnohouholníka. Po dosadení dostaneme $(8 - 2) \cdot 180° : 8 = 135°$. Teraz si označme priesečník úsečiek AF a BG X. Ďalej sa pozrime na to, že úsečka HG je rovnobežná s úsečkou AF a zároveň úsečka AH je rovnobežná s úsečkou BG. Takže štvoruholník $HAXG$ je rovnobežník, a teda uhol AXG je rovnako veľký ako uhol AHG, a to 135°. Uhol AXG je susedný s našim hľadaným uhlom AXB, čo znamená, že ich súčet je 180°. Teda veľkosť uhla AXB vieme jednoducho dorátať: $AXB = 180° - AXG = 180° - 135° = 45°$.



Úloha 9:

Mozzarella má pokazené digitálne hodiny (s časom od 00:00 do 23:59), na ktorých svietia iba čiarky v hornej polovici čísel (vrátane strednej vodorovnej čiarky). Keď sa na svoje hodiny pozrela, hneď však zistila, koľko je hodín. Prezradila, že čas sa skladal zo 4 rôznych číslic. Zistite počet rôznych časov, ktoré mohli digitálne hodiny ukazovať. Jednotlivé číslice na nepokazených digitálnych hodinách vyzerajú ako na obrázku.



Výsledok: 34

Riešenie:

Na začiatku si musíme všimnúť, na ktorom mieste môžu byť aké cifry. Čísla 0 a 1 nemajú hornú časť rovnakú so žiadnym iným číslom, čo znamená, že na prvom mieste byť môžu. Číslo 2 má síce rovnakú hornú časť ako číslo 3, no keďže číslo 3 na prvom mieste nemôže byť, tak vieme rátať aj s číslom 2. Na prvom mieste sa teda môžu ocitnúť cifry 0, 1, 2.

To, aká cifra bude na druhom mieste, závisí od toho, aká cifra bude na prvom mieste. Ak by na prvom mieste bola cifra 0, tak by na druhom mieste mohli byť všetky cifry, ktoré majú jedinečnú hornú polovicu, okrem nuly. Takými číslami sú čísla 1, 4, 7.

Začnime s prípadom, keď je na druhom mieste číslo 1. Vieme, že tretie a štvrté miesto sú od seba závislé. Vypíšeme si teda čísla, ktoré môžu byť na treťom a štvrtom mieste. Na treťom mieste môžu byť čísla 4, 5 a na štvrtom čísla 4, 7. Teraz si všimneme, že číslo 4 je v oboch dvojiciach. To znamená, že ak by bolo na treťom mieste, tak by na štvrtom muselo byť číslo 7, a ak by na treťom bolo číslo 5, tak by na štvrtom mohli byť 4 aj 7, čo nám dáva 3 možnosti.

V prípade, keď je na druhom mieste číslo 4, si znova vypíšeme čísla, ktoré sa môžu nachádzať na zvyšných miestach. Pre tretie miesto sú to čísla 1, 5 a pre štvrté 1 a 7. Teraz znova vidíme, že číslo 1 môže byť na oboch pozíciach, a teda dostávame ďalšie tri možnosti.

A napokon pre číslo 7 na druhom mieste môžu byť na treťom mieste čísla 1, 5, 4 a na štvrtom čísla 1 a 4. Vidíme, že ak bude na treťom mieste číslo 4, tak na štvrtom bude číslo 1 a naopak, čo nám dáva dve možnosti. S číslom 5 vieme spárovať obe čísla, čo sú ďalšie dve možnosti. To nám dáva pre číslo 0 na prvom mieste dokopy 10 možností.

Pre číslo 1 na prvom mieste si môžeme všimnúť, že číslo 1 nahradí číslo 0 na prvom mieste a číslo 0 nahradí číslo 1 na všetkých ostatných, teda dostaneme ďalších 10 možností.

Pri čísle 2 na prvom mieste môžu byť na druhom mieste iba čísla 0 a 1. Z predchádzajúceho poznatku však vieme, že možností pre číslo 0 a 1 bude rovnaký počet, iba budú v jednotlivých možnostiach tieto dve čísla navzájom vymenené.

Pozrime sa teda na prípad s číslom 1 na druhom mieste. Na treťom mieste by v tomto prípade mohli byť čísla 0, 4, 5 a na štvrtom čísla 0, 4, 7. Kombinácií týchto čísel je 9, no dve musíme odrátať, pretože sa v nich opakujú čísla 0 a 4. Dostaneme teda 7 možností.

7 možností máme aj pre číslo 0 na druhom mieste, čo znamená 14 možností pre číslo 2 na prvom mieste.

Riešení máme teda dokopy 34.

Úloha 10:

Máme skupinu syrov, v ktorej sú Mozzarella, Eidam, Parmezán a Gouda, pričom každý z nich buď hovorí pravdu, alebo klame. Zistite kto hovorí pravdu a kto klame podľa nasledujúcich tvrdení:

- Mozzarella: Nikto z nás neklame.
- Eidam: Klame aspoň jeden z nás.
- Parmezán: Klamú aspoň dvaja z nás.
- Gouda: Parmezán klame.

Výsledok: Mozzarella a Gouda klamú, Eidam a Parmezán hovoria pravdu.

Riešenie:

Začnime s predpokladom, že Mozzarella hovorí pravdu. Ak Mozzarella hovorí pravdu, tak ani jeden z ostatných syrov neklame, teda tiež hovorí pravdu. No všetky ostatné syry tvrdia, že niekto klame. Ak by mali pravdu, niekto by klamal, no Mozzarella tvrdí, že neklame nikto (a tiež má pravdu). Vychádza nám nezmysel, takže Mozzarella určite klame.

Čo ak hovorí pravdu Eidam? Eidam tvrdí, že aspoň jeden syr klame, čo sa už potvrdilo, keďže Mozzarella určite klame. Toto znamená, že Eidam určite hovorí pravdu.

Nakoniec sa pozrime na výroky Parmezána a Goudy. Ak by Parmezán hovoril pravdu, Gouda by klamala. Ak by Parmezán klamal, Gouda by hovorila pravdu. Tak či tak, jeden z nich určite klame. A keďže klame aj Mozzarella, určite klamú dvaja. Toto však znamená, že Parmezán má pravdu (lebo tvrdí, že klamú aspoň dvaja). A teda Parmezán musí hovoriť pravdu a Gouda musí klamať.

Úloha 11:

Kráľ Hermelín má dve truhlice, ktoré v sebe majú zlaté, strieborné a bronzové mince. Jedna z nich má 50 zlatých, 10 strieborných a 2 bronzové mince a druhá z nich má 10 zlatých, 40 strieborných a 12 bronzových mincí. Koľko najmenej mincí musí Jeho veličenstvo z niektorej z truhlíc vybrať, aby zistilo, ktorá je ktorá, pričom sa nesmie pozrieť do žiadnej z truhlíc?

Výsledok: 23

Riešenie:

Keďže chceme ukázať, že toľko je najmenší postačujúci počet mincí na rozlíšenie debien, rozdeľme si dôkaz na dve časti. Prvú, že toľko mincí nám naozaj stačí, a druhú, že menej by nám nestačilo.

Začnime prvou. Ak z prvej truhlice vytiahneme 23 mincí, určite medzi nimi bude aspoň 11 zlatých mincí, pretože bronzových a strieborných je v nej spolu len $2 + 10 = 12$. Ale v druhej truhlici je len 10 zlatých mincí. Teda po vytiahnutí 23 mincí určite vieme podľa počtu zlatých povedať, o ktorú truhlicu ide.

Teraz sa pozrime na druhú časť, či to nejde na menej. Ak by sme vytiahli $23 - 1 = 22$ mincí, mohla by nastať možnosť, že by sme vytiahli 10 zlatých, 10 strieborných a 2 bronzové mince, a teda by sme nevedeli, o ktorú debnu ide, keďže tieto počty sa nachádzajú v oboch debnách. Rovnaký problém by mohol nastať aj s menším počtom mincí.

Úloha 12:

Ciferný súčet veku dcérky Mozzarellky je rovnaký ako ciferný súčet veku mamky Mozzarelly. Mozzarella je však dvakrát staršia ako Mozzarellka. Aký najmenší môže byť ich vekový rozdiel, pokiaľ sú ich veky dvojciferné čísla? (Veky sú kladné celé čísla.)

Výsledok: 18

Riešenie:

Na začiatok si treba uvedomiť, že keďže vek Mozzarelly je dvojnásobok veku Mozzarellky, rozdiel ich vekov sa rovná veku Mozzarellky. Platí to, pretože vek Mozzarelly = vek Mozzarellky + vekový rozdiel = vek Mozzarellky + vek Mozzarellky. Preto, ak chceme nájsť najmenší vekový rozdiel, musíme nájsť najmenší možný vek Mozzarellky.

Keďže obidve majú dvojciferný vek, Mozzarellka má najmenej 10 rokov. 10 má ciferný súčet $1+0 = 1$ a ich dvojnásobok, 20, má ciferný súčet $2+0 = 2$. To nám nesedí. Týmto spôsobom postupne overíme Mozzarellkine veky 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. Žiadna z týchto možností nevyhovuje. Keď vyskúšame 18, zistíme, že ciferný súčet je $1 + 8 = 9$ a ciferný súčet dvojnásobku, 36, je $3 + 6 = 9$. Táto možnosť vyhovuje, a preto má Mozzarellka 18 a Mozzarella 36 rokov. Ich vekový rozdiel môže byť teda najmenej 18.

Úloha 13:

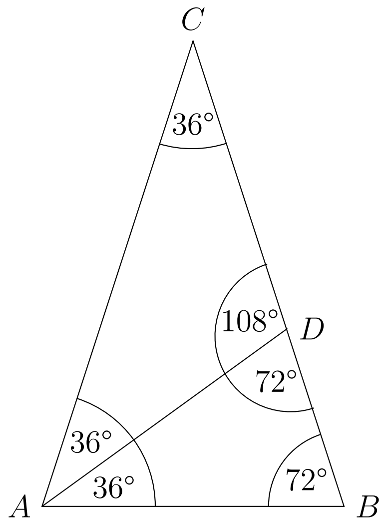
Žezlo kráľa Hermelína má vyrytý symbol v tvare rovnoramenného trojuholníka so základňou AB, v ktorom má uhol ACB veľkosť 36°. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode D. Zistite dĺžku strany AB, ak $|CD| = 8$.

Výsledok: 8

Riešenie:

Najprv si dorátajme všetky uhly vnútri trojuholníka. Vieme, že trojuholník ABC je rovnoramenný. Uhly pri základni AB sú teda zhodné. Veľkosť každého z nich $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = (180° - 36°) : 2 =$

72°. Ďalej AD je os uhla BAC, a teda delí tento uhol napoly. $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DAB| = 72° : 2 = 36°$. Teraz si dorátajme zvyšné uhly. Uhol BDA si môžeme dorátať zo súčtu uhlov v trojuholníku ABD ako $180° - 36° - 72° = 72°$. Posledný uhol ADC je s týmto uhlom susedný a $180° - 72° = 108°$. Teraz trojuholníky CAD (so základňou CA) a BDA (so základňou BD) sú rovnoramenné, pretože uhly pri ich základniach sú zhodné. Strana CD je teda rovnako dlhá ako strana AD a tá je rovnako dlhá ako AB. Keďže $|CD| = 8$, $|AB| = 8$.



Úloha 14:

Adam a Boris hrajú hru. Každý má na začiatku 10 trojuholníkov syra. Po každom kole hry víťaz získa 3 trojuholníky a ten, ktorý prehral, stratí 1 trojuholník syra. Po niekoľkých kolách má Adam 40 a Boris 16 trojuholníkov syra. Koľko kôl hry vyhral Adam?

Výsledok: 12

Riešenie:

Adam a Boris majú na začiatku spolu 20 syrov. Na konci ich majú spolu 56. Takže za trvanie hry pribudlo v ich spoločnej zbierke 36 syrov. V každom kole hry do ich spoločnej zbierky syrov pribudnú 3 syry a ubudne z nej 1 syr. Spolu teda pribudnú 2. V hre potom muselo byť práve $36 : 2 = 18$ kôl, inak by sme na konci mali celkovo viac alebo menej syrov ako 56.

Pozrime sa na to, v koľkých kolách vyhral Adam a v koľkých Boris. Adamovi za celé trvanie hry pribudlo 30 syrov, a teda musel vyhrať niektorých $30 : 3 = 10$ kôl. Ale kôl je dokopy 18. V zvyšných 8 kolách musí Adam získať dokopy 0 syrov.

Za prehru stratí 1 syr a za výhru získa 3 syry. Musí teda prehrať práve trikrát viac ráz ako vyhrať, aby ku každej výhre prislúchali 3 prehry. Vzniknú štvorice, ktoré pozostávajú každá z troch prehier a jednej výhry. V rámci takejto štvorice je počet získaných syrov $3 - 1 - 1 - 1 = 0$. Do 8 kôl sa zmestia $8 : 4 = 2$ takéto štvorice. Dokopy budeme mať teda $1 \cdot 2 = 2$ výhry a $3 \cdot 2 = 6$ prehier. Spolu s prvými 10 výhrami budeme mať 12 výhier.

Úloha 15:

Na súťaži vo vrhaní syra sú 19 rôzne šikovní hráči. Každý z hráčov si zahrá 2 zápasy proti 2 rôznym súperom a šikovnejší z hráčov vždy vyhrá. Turnaj vyhrá ten, kto vyhrá oba svoje zápasy. Koľko najviac výhercov môže mať táto súťaž?

Výsledok: 9

Riešenie:

Každý z hráčov si zahrá 2 zápasy. Celkový počet odohraných zápasov na súťaži vypočítame ako polovicu súčinu počtu hráčov a počtu zápasov jedného hráča. Dokopy sa teda odohrá $19 \cdot 2 : 2 = 19$

zápasov. Nakoľko sú všetci hráči rôzne šikovní, neexistuje remíza. Každý zápas prinesie jednu výhru a jednu prehru. Dokopy teda máme 19 výhier. Tieto výhry chceme rozdeliť medzi hráčov tak, aby čo najviac z nich malo po 2 výhry. Takýchto hráčov môže byť maximálne 9, pretože $19 : 2 = 9$, zv. 1.

Pozrime sa aj na jeden konkrétny turnaj, aby sme overili, že to tak skutočne môže byť, nakoľko zatiaľ iba vieme, že ich nemôže byť viac. Povedzme, že máme 19 hráčov očíslovaných od 1 po 19 podľa toho, ako veľmi šikovní sú (pričom 1 je najšikovnejší). Rozdeľme si našich hráčov na 3 skupinky, a to 1 až 8 (ôsmi hráči), 9 až 11 (traja hráči) a 12 až 19 (ôsmi hráči).

Turnaj sa odohrá tak, že hráči z prvej budú hrať proti hráčom z tretej. Zápasy napríklad môžu odohrať tak, že hráč 1 bude hrať proti hráčom 12 a 13, hráč 2 proti hráčom 13 a 14 a tak ďalej, až hráč 8 proti hráčom 19 a 12. Hráči z prvej skupinky vždy vyhrajú, pretože sú šikovnejší. Budeme už mať 8 hráčov, ktorí vždy vyhrajú, a 8 hráčov, ktorí vždy prehrajú.

V druhej skupinke budú hrať hráči medzi sebou každý s každým. V rámci tejto skupinky sa odohrajú $3 \cdot 2 : 2 = 3$ zápasy. Priebeh bude taký, že 9 vyhrá aj nad 10, aj nad 11 a následne 10 vyhrá nad 11. Budeme mať jedného dvojnásobného výhercu, jedného jednonásobného výhercu a jedného, čo vždy prehral.

Dokopy teda bude $8 + 1 = 9$ hráčov, ktorí vyhrajú oba zápasy.

Úloha 16:

Adam sa rozhodol celý týždeň cestou do syrárne čítať Príručku dobrého syrára. V pondelok prečítal niekoľko strán. V utorok prečítal o jednu stranu viac ako v pondelok, v stredu prečítal o jednu stranu viac ako v utorok, vo štvrtok prečítal o jednu stranu viac ako v stredu a v piatok prečítal o jednu stranu viac ako vo štvrtok. Potom zistil, že spolu prečítal štyrikrát viac strán, ako v piatok. Koľko strán prečítal Adam v piatok?

Výsledok: 10

Riešenie:

Označme si počet prečítaných strán v pondelok x. Potom v utorok prečítal $x+1$ strán, v stredu $x+2$, vo štvrtok $x+3$ a v piatok $x+4$. Počet strán, ktoré prečítal od pondelka do piatka, je štvornásobok počtu strán, ktoré prečítal v piatok. Teda môžeme zostrojiť rovnicu.

$$\begin{aligned} x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) &= 4(x+4) \\ x + x + x + x + x + 1 + 2 + 3 + 4 &= 4x + 16 \\ 5x + 10 &= 4x + 16 \qquad\qquad / - (4x + 10) \\ x &= 6 \end{aligned}$$

V pondelok Adam prečítal 6 strán. V piatok prečítal $x + 4$, teda 10 strán.

Úloha 17:

Boris rozdelil nožom syr v tvare obdĺžnika jednou čiarou na dva menšie obdĺžniky. Obvod pôvodného obdĺžnika je 76 cm. Obvody novovzniknutých obdĺžnikov sú 40 cm a 52 cm. Určte rozmery pôvodného obdĺžnika.

Výsledok: $30\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$

Riešenie:

Označme si strany pôvodného obdĺžnika a a b. Bez ujmy na všeobecnosti rozdeľme obdĺžnik rezom cez stranu b. Strana b je teda teraz rozdelená na dva úseky. Pomenujme dĺžku jedného z nich x a druhého $b - x$. Nech je úsek x väčší ako úsek $b - x$. Potom obvod obdĺžnika so stranami a a x je 52 cm a obvod obdĺžnika so stranami a a $b - x$ je 40 cm:

$$\begin{aligned} 2(a + x) &= 52 \\ 2(a + b - x) &= 40 \end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$a + x = 26$$
$$a + b - x = 20$$

Rovnice sčítame:

$$2a + b = 46$$

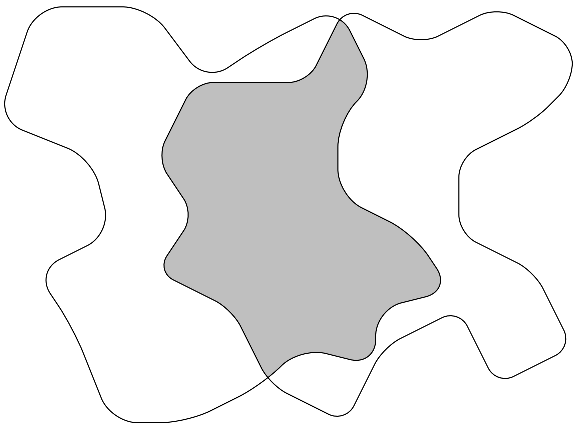
Zo zadania vieme, že obvod pôvodného obdĺžnika s dĺžkami strán a a b je 76 cm, teda $2a + 2b = 76$. Od tejto rovnice odčítame našu rovnicu a dostávame $b = 30$. Dosadíme a dopočítame:

$$2a + 2b = 76$$
$$2a + 2 \cdot 30 = 76$$
$$2a = 16$$
$$a = 8$$

Rozmery obdĺžnika zo zadania sú preto $30\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$ alebo ekvivalentne $8\,\text{cm} \times 30\,\text{cm}$.

Úloha 18:

Po mastnom Syrákovi ostali na stoličke dve machule s rovnakým obsahom $6\,\text{cm}^2$, ktoré sa pretínajú ako na obrázku. Vieme, že obsah sivej časti je rovný súčtu obsahov krajných dvoch. Aký veľký je obsah sivej časti?



Výsledok: $4\,\text{cm}^2$

Riešenie:

Keďže obidve machule majú rovnaký obsah, tak krajná časť ľavej machule musí mať rovnaký obsah ako krajná časť pravej machule. Označme si obsah jednej krajnej časti ako a a obsah sivej časti ako b. Vieme, že obsah sivej časti je rovný súčtu obsahov krajných dvoch. Obidve krajné časti majú obsah a, teda súčet ich obsahov je $2a$, čo znamená, že $b = 2a$.

Ďalej vieme, že obsah jednej machule je $6\,\text{cm}^2$, čiže $a + b = 6\,\text{cm}^2$. Do tejto rovnice môžeme za b dosadiť $2a$ a dostať, že $a + 2a = 6\,\text{cm}^2$ a $3a = 6\,\text{cm}^2$. Celú rovnicu vydelíme 3 a vyjde nám, že $a = 2\,\text{cm}^2$. Ako posledné už len do rovnice $a+b = 6\,\text{cm}^2$ dosadíme hodnotu a, ktorú sme práve zistili, a dostaneme, že $2\,\text{cm}^2 + b = 6\,\text{cm}^2$, čiže $b = 4\,\text{cm}^2$.

Úloha 19:

Parmezán sa zveril Eidamu s tajomstvom. Jeho heslo je najmenšie trojciferné číslo také, že sčítaním so sebou samým napísaným odzadu dá súčet, ktorého všetky cifry sú nepárne. Aké je Parmezánovo heslo?

Výsledok: 209

Riešenie:

Začneme tým, že na to, aby sme súčtom získali nepárne číslo, musíme sčítať párne číslo a nepárne číslo. Z toho vieme, že pri sčítaní prvej a poslednej cifry prejdeme cez desiatky, pretože druhá cifra sa sčíta s druhou cifrou, čo dá vždy párny súčet.

Keďže hľadáme najmenšie číslo, na mieste stoviek chceme použiť čo najmenšiu cifru (medzi trojcifernými číslami číslo s menšou číslicou na mieste stoviek je vždy menšie). 0 použiť nemôžeme, lebo číslo by nebolo trojciferné, ale najviac dvojciferné. Nemôžeme použiť ani 1. Totiž aby sme súčtom s ňou dosiahli prechod cez desiatky, museli by sme ju sčítať s 9, ktorá je tiež nepárna, čím by sme dostali párny súčet, ktorý nechceme. 2 na mieste stoviek (aby sme presiahli 10) musíme sčítať s 8 alebo 9. 8 je párna rovnako ako 2, čiže ju nemôžeme použiť. Ostala nám 9 na miesto jednotiek a spomínaný prechod cez desiatky po sčítaní pôvodného a otočeného čísla dá 1, keďže $9 + 2 = 11$. Na miesto desiatok preto potrebujeme párne číslo a najmenšie párne číslo je 0. S 0 je heslo 209, otočené číslo 902 a ich súčet $209 + 902 = 1111$. 1111 má všetky cifry nepárne, takže 209 je riešenie.

Úloha 20:

Akým najmenším číslom musí Parmezán vynásobiť číslo 11760, aby bol výsledok násobenia tretia mocnina prirodzeného čísla? (Tretia mocnina čísla a (čiže a^3) je rovná $a \cdot a \cdot a$.)

Výsledok: 6300

Riešenie:

Hľadáme najmenšie číslo, ktorým musíme vynásobiť 11760, aby sme dostali číslo, ktoré bude treťou mocninou prirodzeného čísla.

Ak má byť nejaké číslo x treťou mocninou čísla y, tak musí $x = y^3 = y \cdot y \cdot y$. Čiže prvočíselný rozklad čísla x nám vznikne tak, že umocníme prvočíselný rozklad y na tretiu. Teraz prvočíslo, ktoré je v prvočíselnom rozklade čísla y napríklad k ráz, v prvočíselnom rozklade čísla x bude $3k$ ráz (keďže $x = y \cdot y \cdot y$, takže ho tam do súčinu dostaneme od každého y práve k-krát). To ale znamená, že v prvočíselnom rozklade x je počet výskytov každého prvočísla deliteľný 3.

Vynásobením musíme teda doplniť početnosť každého prvočísla v prvočíselnom rozklade čísla 11760 na počet deliteľný tromi. Prvočíselný rozklad 11760 je $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Čiže musíme číslo 11760 vynásobiť aspoň číslom $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$.

Úloha 21:

V chladničke sa každý plátok Eidamu pozná s práve 6 korbáčikmi a každý korbáčik sa pozná s práve 4 plátkami Eidamu, pričom všetky poznania sú vzájomné. Koľko je v chladničke plátkov Eidamu, ak korbáčikov je tam 18?

Výsledok: 12

Riešenie:

To, keď sa korbáčik a plátok Eidamu poznajú, si vieme predstaviť ako čiaru spájajúcu tieto dva syry. Keďže máme v chladničke 18 korbáčikov a z každého vedú 4 čiary k plátkom Eidamu (každý korbáčik pozná práve 4 plátky Eidamu), celkovo od korbáčikov vedie $18 \cdot 4 = 72$ čiar. Avšak poznania sú vzájomné, teda každá z čiar má jeden koniec pri nejakom plátku Eidamu a druhý pri nejakom korbáčiku. Z toho vidíme, že aj od plátkov Eidamu ku korbáčikom musí viesť 72 čiar. Keďže každý plátok Eidamu pozná práve 6 korbáčikov, na každý z plátkov Eidamu pripadá 6 týchto čiar, teda v chladničke musí byť práve $72 : 6 = 12$ plátkov Eidamu.

Úloha 22:

Koľko existuje prirodzených čísel takých, že súčet ich číslic je 2022 a súčin ich číslic je 2?

Výsledok: 2021

Riešenie:

Aby bol ciferný súčin 2, môžeme použiť len cifry 1 a jednu cifru 2. Ak by sme chceli použiť viac cifier 2 alebo väčšie cifry ako 2, bol by výsledný súčin väčší ako 2. Zároveň nemôžeme použiť nulu, pretože potom by bol aj výsledný súčin cifier rovný nule.

Ciferný súčet tohto čísla je 2022. Keďže cifru 2 použijeme len raz, cifru 1 musíme použiť 2020-krát ($2022 = 2020 \cdot 1 + 1 \cdot 2$).

Ostáva nám už iba zistiť, koľko rôznych čísel vieme vytvoriť z jednej cifry 2 a 2020 cifier 1. Cifru 2 vieme dať na každú z 2021 pozícií čísla, keďže máme dokopy 2021 cifier. Zvyšné pozície jednoznačne obsadia cifry 1. To nám dáva 2021 možností, čiže 2021 rôznych čísel.

Úloha 23:

Eidam, Gouda a Mozzarella hodia každý jednou hracou kockou inej farby. Aký je počet rôznych možností, v ktorých hodili dve párne a jedno nepárne číslo?

Výsledok: 81

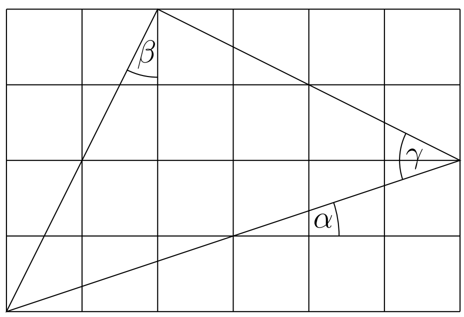
Riešenie:

V každej vyhovujúcej možnosti musí práve jeden hráč hodiť nepárne číslo. Máme troch hráčov, teda 3 možnosti, ako vybrať toho, ktorý to bude. Keďže sú na hracej kocke 3 nepárne čísla, má tento hráč 3 možnosti pre číslo, ktoré môže hodiť. Zvyšní dvaja hráči musia hodiť číslo párne. Tie sú na hracej kocke tiež 3, čiže obaja títo hráči majú po 3 možnosti pre číslo, ktoré môžu hodiť.

Máme 3 možnosti, ako vybrať hráča, ktorý hodí nepárne číslo. Ten má 3 možnosti, aké číslo to môže byť, a zvyšní dvaja hráči majú po 3 možnosti, ako hodiť párne číslo. Dokopy je to $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, čiže 81 možností.

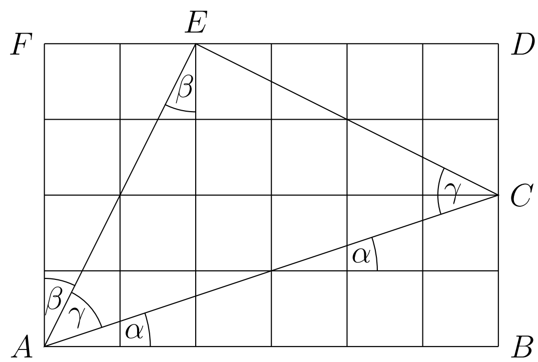
Úloha 24:

Aký je súčet veľkostí uhlov $\alpha + \beta + \gamma$?



Výsledok: 90°

Riešenie:



Z obrázku je zjavné, že uhol α je súhlasný s uhlom BAC, preto sú zhodné. Uhol β je striedavý s uhlom FAE, preto sú tiež zhodné. Všimnime si, že $|AE| = |CE|$, keďže sú uhlopriečkami obdĺžnikov s rovnakými rozmermi. Čiže trojuholník ACE je rovnoramenný, a teda uhol EAC je zhodný s uhlom ACE, ktorého veľkosť je γ. Čiže súčet uhlov α, β, γ je rovný veľkosti uhla FAB, ktorý je vnútorným uhlom obdĺžnika $ABDF$, a teda má veľkosť 90°.

Úloha 25:

Parmigiano Reggiano hľadal všetky šesťciferné čísla, ktoré spĺňajú nasledujúce podmienky:

- Ciferný súčet čísla je 21.
- Dvojciferné číslo vytvorené z prvých dvoch číslic je trojnásobok dvojciferného čísla vytvorené z posledných dvoch číslic.
- Všetky číslice sú rôzne.
- Číslo neobsahuje číslicu 0.

Nájdite všetky šesťciferné čísla, ktoré spĺňajú tieto štyri podmienky.

Výsledok: 364512, 365412, 634521, 635421

Riešenie:

Keďže nemôžeme použiť číslicu 0 a všetky číslice sú rôzne, najmenší ciferný súčet, ktorý vieme vytvoriť, je $1+2+3+4+5+6 = 21$. To je ciferný súčet, ktorý chceme, aby hľadané čísla mali, teda vieme, že použijeme práve týchto 6 číslic.

Teraz sa pozrime, aké čísla určite nemôžu byť na posledných dvoch miestach. $6 \cdot 3 = 18$, teda 6 určite nebude na mieste jednotiek, pretože cifru 8 nemáme, a ak by bola na mieste desiatok, vznikol by nám trojciferný a nie dvojciferný násobok. Rovnako tam nemôžu byť ani číslice 5 a 3. $5 \cdot 3 = 15$ a nemôžeme dvakrát použiť číslicu 5, ani nám nemôže vzniknúť trojciferné číslo na začiatku. $3 \cdot 3 = 9$, teda 3 určite nebude na mieste jednotiek, pretože číslicu 9 nemáme. Ak by bola na mieste desiatok, vzniknutý trojnásobok by buď začínal na 9, alebo bol trojciferný a ani jedna možnosť nám nevyhovuje.

Ostali nám teda číslice 1, 2, 4. Z nich vieme vytvoriť dvojice 12, 14, 21, 24, 41, 42. Poďme ich overiť:

- $12 \cdot 3 = 36$: číslo bude 364512 alebo 365412.
- $14 \cdot 3 = 42$: číslicu 4 by sme museli použiť dvakrát, čo sa nedá.
- $21 \cdot 3 = 62$: číslo bude 634521 alebo 635421.
- $24 \cdot 3 = 72$: číslicu 7 nevieme použiť.
- $41 \cdot 3 = 123$: 123 nie je dvojciferné číslo, teda táto možnosť nevyhovuje.
- $42 \cdot 3 = 126$: 126 tiež nie je dvojciferné číslo, ani táto možnosť nevyhovuje.

Takto sme našli všetky štyri možné čísla.

Úloha 26:

Kocka syra s hranou 3 dm je zložená z 27 rovnakých kocôčok. Ofarbíme ju načerveno a potom z nej odstránime všetkých 7 kocôčok, ktoré majú jednotlivo červenú najviac jednu stenu. Aký je povrch vzniknutého telesa?

Výsledok: $72\,\mathrm{dm}^2$

Riešenie:

Poďme sa najprv pozrieť na to, ktorých 7 kocôčok odstránime z kocky. Tieto majú každá zo zadania najviac 1 stenu červenú, teda 0 alebo 1. 0 červených stien má iba stredná kocôčka, ktorá je uprostred kocky. 1 červenú stenu má 6 kocôčok, ktoré sa nachádzajú uprostred stien kocky.

Teraz sa pozrime na to, aký je povrch finálneho telesa. Najprv si povedzme, aký obsah má jedna plôška malej kocôčky. Táto má rozmer $1\,\mathrm{dm} \times 1\,\mathrm{dm}$, čiže $1\,\mathrm{dm}^2$. Rozoberme si teraz obsah postupne. Najprv sa pozrime na to, koľko červených plôšok nám ostalo na povrchu pôvodnej kocky. Ostalo nám vždy 8 z 9 plôšok na každej stene, a teda spolu to je $6 \cdot 8 \cdot 1\,\mathrm{dm}^2 = 48\,\mathrm{dm}^2$.

Vonkajšok máme, teraz sa pozrime na vnútro. Zvnútra sme odstránili 6 kocôčok, ktoré boli súčasťou steny pôvodnej kocky. Z kociek, ktoré doteraz susedili s týmito kockami, nám ostali 4 (pôvodne tieto kocôčky susedili s 5 kocôčkami, no stredná kocôčka tiež vypadla). Vznikli nám 4 nové plôšky po každej z týchto 6 kocôčok a celkový povrch vnútra bude $6 \cdot 4 \cdot 1\,\mathrm{dm}^2 = 24\,\mathrm{dm}^2$.

Úloha 27:

Nech n je číslo s 38 deliteľmi, ktoré nie je deliteľné trinástimi. Koľko deliteľov má číslo $13n$?

Výsledok: 76

Riešenie:

Pozrime sa na nejakého deliteľa čísla n, môžeme si ho označiť ako x. Číslo $13n$ bude určite deliteľné číslom x, keďže $13n$ je násobok čísla n. Rovnako bude číslo $13n$ deliteľné číslom $13x$, keďže $13n$ je deliteľné 13 aj x, a zároveň čísla 13 a x sú nesúdeliteľné, keďže n nie je deliteľné 13. Kvôli tomu, že pôvodné číslo n nie je deliteľné trinástimi a číslo 13 je prvočíslo, nám každý deliteľ čísla n dá 2 delitele čísla $13n$ (z x dostaneme x a $13x$). Číslo $13n$ má preto dvojnásobný počet deliteľov, čiže $38 \cdot 2 = 76$ deliteľov.

Úloha 28:

Oštiepok má šachovnicu 8×8. Koľkými spôsobmi na ňu Oštiepok môže položiť 2 identické figúrky tak, aby mali obe súčet súradníc rovnaký, pričom nemôže dať obe na rovnaké políčko? Riadky aj stĺpce sú označené číslami postupne od 1 do 8, pričom vľavo dole je políčko so súradnicami 1, 1.

Výsledok: 140

Riešenie:

Napíšme si do každého políčka súčet jeho súradníc:

8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*

Môžeme si všimnúť, že šachovnica sa dá rozdeliť na 15 diagonál, ktorých políčka majú rovnaký súčet súradníc. Políčko $[1, 1]$ tvorí prvú diagonálu, políčka $[1, 2]$ a $[2, 1]$ druhú a podobne pre ostatné diagonály. Celkový počet možností je teda rovný počtu možností, ako umiestniť figúrky do rovnakej diagonály. To znamená, že to je počet možností, ako umiestniť dve políčka do prvej diagonály, plus počet možností, ako umiestniť dve políčka do druhej diagonály a tak ďalej.

Do diagonály s jedným políčkom sa nedajú umiestniť dve figúrky. Vo všeobecnosti do diagonály s x políčkami sa dajú dve figúrky umiestniť $(x \cdot (x-1)) : 2$ spôsobmi. Je to preto, že najprv si vyberieme prvú pozíciu figúrky, kde máme x možností výberu. Potom druhú pozíciu, kde zostane $x-1$ možností výberu, a potom si uvedomíme, že toto číslo treba vydeliť dvomi, lebo nezáleží na poradí výberu.

Naše uhlopriečky majú postupne 1 políčko, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 a 1. Tým pádom máme $0+1+3+6+10+15+21+28+21+15+10+6+3+1+0 = 140$ možností, ako umiestniť dve figúrky na šachovnicu tak, aby mali rovnaký súčet súradníc.

Úloha 29:

Nájdite desaťciferné číslo, ktoré má všetky cifry rôzne a spĺňa nasledujúce vlastnosti:

- Rozdiel susedných dvoch cifier je okrem jednej dvojice vždy menší ako 3.
- Súčet každej trojice susedných cifier je deliteľný 3.
- Súčet posledných dvoch cifier je 5.
- Číslo nie je deliteľné 10.
- 9 je cifra vyššieho rádu ako 6.

Výsledok: 9786450123

Riešenie:

Najprv sa pozrieme na druhú podmienku. Keď chceme aby súčet troch čísel bol deliteľný 3, musia buď všetky tri dávať po delení tri rovnaký zvyšok, alebo dávať každé iný. Keďže sú však dve čísla dávajúce rovnaký zvyšok od seba vzdialené aspoň o tri, vieme, že čísla v každej trojici čísel budú dávať po delení tri rôzne zvyšky (pretože prvú podmienku môže porušiť iba jedna dvojica, ale v rámci jednej trojice by ju museli porušiť až dve dvojice, keby sme chceli, aby všetky tri cifry mali rovnaký zvyšok po delení tromi).

Všimnúť si môžeme aj to, že keďže má naše číslo 10 rôznych cifier, musíme použiť práve všetkých 10 cifier. Medzi týmito ciframi dávajú po delení tromi zvyšok 0 štyri, zvyšok 1 tri a zvyšok 2 tiež tri. Keďže je čísel so zvyškom 0 najviac, musia obsadzovať každú tretiu pozíciu začínajúc prvou a končiac poslednou. Podľa tretieho pravidla číslo môže končiť dvojčíslím 50, čo ale vylučuje štvrtá podmienka, alebo 23, čo je správna možnosť.

Bez porušenia prvého pravidla môže byť číslo 0 iba vedľa čísel 1 a 2 a číslo 1 môže byť bez porušenia prvého pravidla len vedľa čísel 0, 2 a 3. Ak na tretie číslo od konca dáme niečo iné ako 1, potom jednotka bude musieť byť niekde skôr v čísle. Avšak, keďže sme 2 a 3 už dali na koniec, bez porušenia prvého pravidla môže byť jej susedom iba 0. Takže jednotka s jej druhým susedom (musí mať dvoch susedov, pretože po jednom susedovi majú iba čísla so zvyškom 0 po delení 3) spolu porušia prvé pravidlo. Avšak aj nula ho poruší z druhej strany, pretože dvojku sme už použili a nulou sa číslo začínať nemôže. Takto by sme porušili prvé pravidlo minimálne dvakrát, čo je spor so zadaním. Tým pádom vieme, že sa číslo bude končiť na 123.

Rovnaký princíp použijeme pri nule. Keby nebola štvrtá od konca, musela by byť niekde skôr v čísle, avšak 1 a 2 už máme použitú, takže by porušila prvé pravidlo s oboma svojimi susedmi. Musí mať dvoch susedov, pretože desaťciferné číslo nemôže mať 0 desiatu sprava.

Vyskúšame možnosť 80123. $80123 \implies 780123 \implies 6780123$ (pre poslednú podmienku) $\implies 56750123 \implies 456780123$. Tu potrebujeme dopísať číslo 9, čo by porušilo prvé pravidlo, takže je to nesprávna možnosť a na piatom mieste od konca nebude 8, takže 50123. Teraz vyskúšame možnosť $750123 \implies 6750123$ (pre poslednú podmienku) $\implies 86750123$, čo nie je správne, pretože tam ešte niekam potrebujeme dopísať číslo 4, čo zjavne poruší prvé pravidlo. Zostáva jediná možnosť, a to $450123 \implies 6450123 \implies 86450123 \implies 786450123 \implies 9786450123$, čo je správne riešenie.

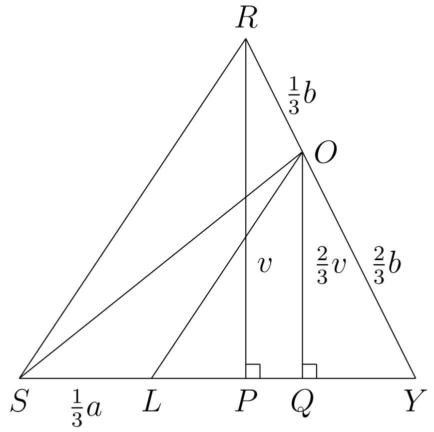
Úloha 30:

V trojuholníku SYR leží bod O v jednej tretine strany YR bližšie k bodu R. Bod L leží v jednej tretine strany SY bližšie k bodu S. Akú časť obsahu trojuholníka SYR tvorí trojuholník SOL?

Výsledok: $\frac{2}{9}$

Riešenie:

Najprv si celú situáciu zobrazme na obrázku:



Označme si dĺžku strany SY a, dĺžku strany YR b a dĺžku výšky z vrcholu R na stranu SY v.

Najprv sa pozrime na dĺžku základní trojuholníkov SYR a SOL. Ako základňu trojuholníka SYR si zvoľme stranu SY, ktorá má dĺžku a. Za základňu trojuholníka SOL si zvoľme stranu SL, ktorá má dĺžku tretiny z dĺžky strany SY, teda $|SL| = |SY| : 3 = a : 3$.

Teraz sa pozrime na dĺžky výšok týchto trojuholníkov na ich už spomínané základne, úsečky SY a SL, ktoré sú obe súčasťou priamky SY. Spusťme si kolmice z vrcholov R a O na SY a ich päty označme postupne P, Q (ako na obrázku). Pozrime sa na trojuholníky PYR a QYO. Vidíme, že uhol pri vrchole Y majú totožný a zároveň majú zhodný pravý uhol pri vrcholoch P a Q. Takže majú zhodné dva uhly, teda sú podobné podľa vety *uu* pre podobné trojuholníky. Takže (keďže podobné trojuholníky majú rovnaké pomery príslušných dvojíc strán):

$$\frac{|OQ|}{|RP|} = \frac{|YO|}{|YR|},$$

čo keďže $|YR| = b$ a $|OR| = b : 3$ (bod O leží v tretine strany YR bližšie k R), teda $|YO| = 2b : 3$, znamená, že:

$$\frac{|YO|}{|YR|} = \frac{\frac{2}{3}b}{b} = \frac{2}{3} = \frac{|OQ|}{|RP|},$$

a teda keďže $|RP| = v$, $|OQ| = 2/3$.

Pomer obsahov trojuholníkov SYR a SOL je teda rovný:

$$\frac{S_{SOL}}{S_{SYR}} = \frac{\frac{|SL| \cdot |OQ|}{2}}{\frac{|SY| \cdot |RP|}{2}} = \frac{|SL| \cdot |OQ|}{|SY| \cdot |RP|} = \frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{2}{3}v}{av} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Trojuholník SOL tvorí $2/9$ z obsahu trojuholníka SYR.

Úloha 31:

Adam, Bdam, Cdam, Ddam a Eidam poznajú dvojciferné heslo od Fdamovho mobilu. Každý z nich buď vždy klame, alebo vždy hovorí pravdu. Povedali nám:

- Adam: Heslo je deliteľné 7. Bdam a Cdam buď obaja hovoria pravdu, alebo obaja klamú.
- Bdam: Heslo je deliteľné 5. Adam klame.
- Cdam: Heslo je párne. Hovorím pravdu.
- Ddam: Heslo je deliteľné 3. Cdam klame.
- Eidam: Heslo je väčšie ako 70. Ddam klame.

Aký je súčet všetkých možných hesiel?

Výsledok: 144

Riešenie:

Každá z týchto osôb vyslovila 2 tvrdenia, jedno o samotnom čísle a druhé o ostatných. Žiadne tvrdenia o samotnom čísle si ale neodporujú, a teda to, kto hovorí pravdu a kto klame, musíme zistiť z druhých tvrdení.

Všeobecne platí, že ak X hovorí o Y, že Y klame, tak sa nemôže stať, že obaja hovoria pravdu alebo obaja klamú. Ak by totiž X hovoril pravdu, tak Y musí klamať, aby X-ovo tvrdenie platilo. Ak by X klamal, tak musí Y hovoriť pravdu, aby X-ovo tvrdenie neplatilo.

Z toho teda vieme povedať, že Cdam je iný ako Ddam a Ddam je iný ako Eidam, a tiež to, že Adam je iný ako Bdam (pričom „je iný“ znamená, že jeden z nich dvoch hovorí pravdu a jeden klame). Vyzbrojení touto informáciou sa bližšie pozrime na Cdama, pretože sa vyskytuje až v troch rôznych tvrdeniach:

1. Ak Cdam hovorí pravdu, tak Ddam klame a Eidam hovorí pravdu. O Adamovi a Bdamovi zatiaľ nevieme povedať nič, preto sa bližšie pozrime na Adama a opäť rozlíšme 2 možnosti:

   - Ak by Adam hovoril pravdu, tak Bdam by tiež hovoril pravdu, pretože by musel byť rovnaký ako Cdam (podľa Adamovho pravdivého tvrdenia). My ale vieme, že Adam a Bdam musia byť rôzni. Táto možnosť teda nie je správna.
   - Ak by Adam klamal, tak by Bdam musel tiež klamať, aby bol rôzny od Cdama (podľa Adamovho klamlivého tvrdenia). Opäť ale máme Adama a Bdama rovnakých, čo nám nevyhovuje.

   Neplatí ani jedna z možností, a teda Cdam nesmie hovoriť pravdu.

2. Ak by Cdam klamal, tak by Ddam hovoril pravdu a Eidam klamal. Ďalej sa opäť samostatne pozrime na Adama:

   - Ak by Adam hovoril pravdu, tak by Bdam klamal (aby bol podľa Adamovho pravdivého tvrdenia rovnaký ako Cdam). Táto možnosť nám vyhovuje, pretože Adam a Bdam sú rôzni. Máme teda prvú možnosť, a to:

     1: Adam a Ddam hovoria pravdu a Bdam, Cdam a Eidam klamú.
   - Ak by Adam klamal, tak by Bdam hovoril pravdu (aby bol podľa Adamovho klamlivého tvrdenia iný ako Cdam), čo nám opäť vyhovuje. Máme teda druhú možnosť, a to:

     2: Bdam a Ddam hovoria pravdu a Adam, Cdam a Eidam klamú.

Našli sme dve rôzne možnosti. Po kontrole vidíme, že obe spĺňajú všetky výroky, a teda sú obe správne. Ostáva nám ešte zistiť, aké je Fdamovo číslo.

V prvej možnosti hľadáme číslo, ktoré je deliteľné 7, nie je deliteľné 5, je nepárne, je deliteľné 3 a je menšie alebo rovné 70. Inými slovami, hľadáme násobky čísla 21 $(7 \cdot 3)$, ktoré sú menšie alebo rovné 70. Sú to čísla 21, 42 a 63. Medzi nimi je jedno párne číslo, ktoré nevyhovuje. Z prvej možnosti máme teda iba 2 možné riešenia, a to 21 a 63.

V druhej možnosti hľadáme číslo, ktoré nie je deliteľné 7, je deliteľné 5, je nepárne, je deliteľné 3 a je menšie alebo rovné 70. Inými slovami, hľadáme násobky čísla 15 $(5 \cdot 3)$ menšie alebo rovné 70. Sú to čísla 15, 30, 45 a 60. Dve z nich sú ale párne, a teda riešenia sú iba čísla 15 a 45.

Spolu máme štyri správne riešenia. Ak si ich skontrolujeme, môžeme vidieť, že všetky vyhovujú zadaniu. Súčet všetkých možných správnych riešení je $21 + 63 + 15 + 45 = 144$.

Úloha 32:

Nájdite všetky dvojice dvojciferných prvočísel p a q, pre ktoré:

- $p < q$,
- čísla $p - 6$ a $p + 6$ sú tiež prvočísla,
- ciferný súčet súčinu $p \cdot q$ je rovný $p - 10$,
- q má na mieste jednotiek číslicu o 2 menšiu od číslice na mieste jednotiek v čísle p.

Výsledok: 23 a 71

Riešenie:

Všetky prvočísla väčšie ako 5 musia mať na mieste jednotiek jednu z cifier 1, 3, 7, 9, pretože ak by tam mali párnu cifru, boli by násobkom 2, a ak by tam mali cifru 5, boli by násobkom 5. Zo štvrtej podmienky zo zadania vyplýva, že p nemôže mať na mieste jednotiek cifry 1 a 7 a q na mieste jednotiek nemôže mať cifry 3 a 9. Navyše z druhej podmienky vyplýva, že p nemôže mať na mieste jednotiek ani cifru 9, keďže potom by $p + 6$ končilo cifrou 5, a teda nebolo by prvočíslom. Takže p musí končiť cifrou 3 a podľa štvrtej podmienky sa q končí cifrou 1.

Podľa zatiaľ zistených podmienok musí byť p 13, 23, 43, 53, 73 alebo 83 a q 11, 31, 41, 61 alebo 71 (ostatné dvojciferné čísla končiace na 3, respektíve 1 nie sú prvočísla). Vďaka prvej podmienke zo zadania môžeme odstrániť z možných hodnôt p čísla 73 a 83, keďže sú väčšie ako všetky možné hodnoty q. Rovnako môžeme z možných hodnôt q odstrániť číslo 11, keďže je menšie ako všetky možné hodnoty p. Taktiež môžeme podľa druhej podmienky odstrániť z možných hodnôt p číslo 43, lebo $43 + 6 = 49$ nie je prvočíslo.

Ak by p bolo 13, podľa tretej podmienky by muselo mať číslo $13 \cdot q$ ciferný súčet 3. Najmenší možný súčin $13 \cdot q$ je $13 \cdot 31 = 403$ a najväčší je $13 \cdot 71 = 923$, čiže ciferný súčet čísla $13 \cdot q$ je určite väčší ako 4 (ak by bol najväčší možný súčin $13 \cdot q$ väčší ako 999, mohol by ciferný súčin byť menší, no teraz bude na mieste stoviek určite číslo 4 alebo väčšie). Ak by p bolo 53, podľa tretej podmienky by musel byť ciferný súčet čísla $53 \cdot q$ rovný 43. Keďže p aj q sú dvojciferné čísla, musí byť ich súčin najviac štvorciferné číslo. Štvorciferné číslo s najväčším ciferným súčtom je 9999, ktoré má ciferný súčet 36. Teda všetky čísla menšie ako 9999 majú ciferný súčet menší ako 36 a ciferný súčet $p \cdot q$ nemôže byť 43.

Pre číslo p ostala už len hodnota 23. Podľa tretej podmienky musí byť ciferný súčet čísla $23 \cdot q$ rovný 13. Pre q nám ostali len 4 hodnoty, môžeme teda vyskúšať, ktoré vyhovujú tretej podmienke:

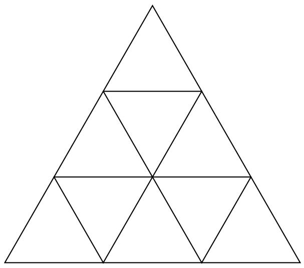
- $23 \cdot 31 = 713$ má ciferný súčet 11, čo nespĺňa podmienku,

- $23 \cdot 41 = 943$ má ciferný súčet 16, čo nespĺňa podmienku,
- $23 \cdot 61 = 1403$ má ciferný súčet 8, čo nespĺňa podmienku,
- $23 \cdot 71 = 1633$ má ciferný súčet 13, čo spĺňa podmienku.

Našli sme teda jediné riešenie, $p = 23$, $q = 71$.

Úloha 33:

Majme trojuholníkový kus syra rozdelený na dieliky takto:

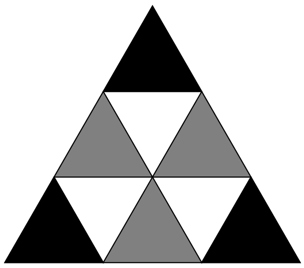


Vieme o ňom, že práve dva dieliky sú plesnivé. Koľko je možností, ako môže syr vyzerať (čiže ako môže mať rozmiestnené plesnivé dieliky)? Dve možnosti považujeme za rôzne, ak ani po prevracaní a otáčaní nevyzerajú rovnako.

Výsledok: 9

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť rozumným vypisovaním možností, pričom zdôvodníme, že všetky možnosti, čo sme našli, sú rôzne. Dieliky syra si rozdeľme na tri skupiny: dieliky na rohoch syra (čierne), dieliky na stranách syra (sivé) a dieliky vnútri syra (biele).



Prejdime si možné farby plesnivých dielikov:

- Ak sú obe plesnivé políčka čierne, máme prvú možnosť, ako môže vyzerať syr. Totižto, keď syr môžeme otáčať a prevracať, syr vyzerá z rôznych pohľadov rôzne, ale stále je rovnaký. Podobne je to, ak sú obe políčka sivé alebo obe biele. Tým pádom máme prvé tri možnosti, ako môže vyzerať syr.
- Ak je jedno políčko čierne a druhé biele, máme dve možnosti. Tú, kde je biele políčko hneď pri čiernom, a tú, kde sú tieto políčka od seba vzdialené. Pridávajú sa nám dve možnosti.
- Ak je jedno políčko čierne a druhé sivé, máme opäť dve možnosti. Jedna, keď sú tieto políčka blízko seba, a druhá, keď sú od seba vzdialené. To sú dve možnosti navyše.
- Ak je jedno políčko sivé a druhé biele, tak sa dotýkajú alebo nedotýkajú, čo sú dve možnosti.

Úloha 34:

Koľko rôznych prirodzených deliteľov má číslo $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$?

Výsledok: 270

Riešenie:

Počet deliteľov čísla vieme vypočítať ako súčin o jeden zväčšených mocniteľov prvočísel v jeho prvočíselnom rozklade (viď úlohu 4). Totiž, keď z prvočísel vyskladáme všetky možné ich súčiny, ktoré sú rôzne delitele pôvodného čísla, každé prvočíslo je v súčine nulakrát až n-krát, kde n je jeho mocniteľ v rozklade, máme teda $n + 1$ možností, koľkokrát prvočíslo použiť. Prvočíselný rozklad tohto čísla je $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Takže počet deliteľov je $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$.

Úloha 35:

Máme štyri kladné celé čísla. Zoberieme aritmetický priemer troch z nich a prirátame k nemu to štvrté. To urobíme všetkými štyrmi spôsobmi a dostaneme 17, 21, 23 a 29. Aké je najväčšie z týchto čísel?

Výsledok: 21

Riešenie:

Označme si tieto štyri čísla ako a, b, c a d. Jednotlivé súčty teda sú:

$$\begin{aligned} a + \frac{b+c+d}{3} &= 17 \\ b + \frac{c+d+a}{3} &= 21 \\ c + \frac{d+a+b}{3} &= 23 \\ d + \frac{a+b+c}{3} &= 29 \end{aligned}$$

Teraz, keď už máme naše rovnice, sa môžme pustiť do ich riešenia. Potrebujeme zistiť, ktoré z čísel a, b, c, d je najväčšie, a zistiť jeho hodnotu. Ak sčítame všetky rovnice, dostaneme nasledovné:

$$\begin{aligned} 2a + 2b + 2c + 2d &= 90 && / : 2 \\ a + b + c + d &= 45 \end{aligned}$$

Ďalej si upravme každú z našich rovníc samostatne. Ak obe strany každej z rovníc vynásobíme 3 (čiže sa zbavíme zlomku), tak dostaneme tieto rovnice:

$$\begin{aligned} 3a + b + c + d &= 51 \\ 3b + c + d + a &= 63 \\ 3c + d + a + b &= 69 \\ 3d + a + b + c &= 87 \end{aligned}$$

Všimnime si, že v každej z rovníc sa nám vyskytuje celý súčet $a + b + c + d$, o ktorom vieme, že je rovný 45. Dosaďme si 45 za $a + b + c + d$ do každej z rovníc:

$$\begin{aligned} 2a + 45 &= 51 \\ 2b + 45 &= 63 \\ 2c + 45 &= 69 \\ 2d + 45 &= 87 \end{aligned}$$

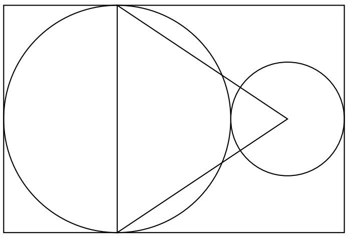
Teraz si môžeme dorátať každú neznámu.

$$a = 3$$
$$b = 9$$
$$c = 12$$
$$d = 21$$

Najväčšie z čísel je d s hodnotou 21.

Úloha 36:

Máme obdĺžnik s obsahom 32 a v ňom nakreslené 2 kružnice, pričom väčšia z nich sa dotýka troch strán obdĺžnika, menšia sa dotýka tej väčšej kružnice a jednej strany obdĺžnika a spojnica ich stredov je rovnobežná s dvomi stranami obdĺžnika. Následne máme vyznačený trojuholník, ktorého vrcholy sú body dotyku väčšej kružnice s obdĺžnikom a stred menšej kružnice (ako na obrázku). Aký obsah má trojuholník?



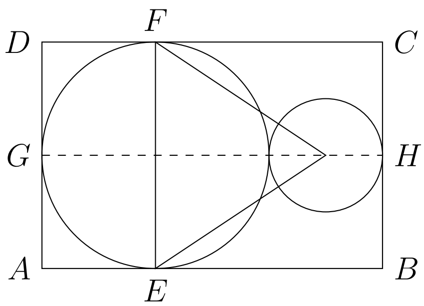
Výsledok: 8

Riešenie:

Označme si polomery kružníc a a b, pričom a je polomer väčšej z kružníc. Všimnime si, že jedna strana trojuholníka je vlastne priemerom väčšej kružnice, takže je dlhá $2a$. Tiež si všimnime, že výška trojuholníka na túto stranu je tvorená polomermi oboch kružníc, čiže jej dĺžku vieme zapísať ako $a + b$. Obsah trojuholníka sa rovná polovici súčinu strany a výšky na túto stranu:

$$\frac{2a(a+b)}{2}$$

Teraz už máme stranu i výšku vyjadrenú pomocou a a b. Ešte nejako využiť informáciu o tom, že obsah obdĺžnika je 32. Z tejto informácie vieme, že súčin strán obdĺžnika je 32. Skúsme si vyjadriť tento súčin pomocou a a b.



Vo všeobecnosti platí, že dotyčnica ku kružnici je kolmá na polomer kružnice v bode dotyku. Uhly AEF, EFD, AGH, GHB sú teda všetky pravé. Útvary $AEFD$ a $ABHG$ sú obdĺžniky. Z toho vyplýva, že ich protiľahlé strany sú rovnako dlhé, $|AB| = |GH|$ a $|AD| = |FE|$. Takže FE dlhé $2a$ je rovnako dlhé ako jedna strana obdĺžnika. Ďalej si môžme všimnúť, že $|GH|$ je vlastne súčet priemerov kružníc, čo je $2a+2b$. Táto dĺžka je zároveň $|AB|$. Zo zadania vieme, že $|AB|\cdot|AD| = 32$. Po dosadení toho, čo už vieme, máme:

$$\begin{aligned} 2a(2a+b) &= 32 \\ 4a(a+b) &= 32 && :2 \\ 2a(a+b) &= 16 \end{aligned}$$

Výraz na ľavej strane rovnice je rovnaký ako výraz v čitateli zlomku v našom vyjadrení obsahu trojuholníka. Dosaďme si teda jeho hodnotu 32 do zlomku a dorátajme obsah trojuholníka.

$$\begin{aligned} S &= \frac{2a(a+b)}{2} \\ S &= \frac{16}{2} \\ S &= 8 \end{aligned}$$

Úloha 37:

Aké je najväčšie trojciferné číslo také, že sa rovná súčtu jeho číslice na mieste stoviek, druhej mocniny číslice na mieste desiatok a tretej mocniny číslice na mieste jednotiek? (Druhá mocnina čísla a, čiže a^2 je rovná $a\cdot a$, podobne $a^3 = a\cdot a\cdot a$.)

Výsledok: 598

Riešenie:

Hľadané číslo si označíme $\overline{abc}$, a bude cifra na mieste stovák, b bude cifra na mieste desiatok a c bude cifra na mieste jednotiek. Zo zadania vieme, že $100a+10b+c = a+b^2+c^3$, odkiaľ

$$99a = b^2 - 10b + c^3 - c = b(b-10) + c(c+1)(c-1).$$

Keďže a, b, c sú cifry, sú to iba jednociferné čísla vrátane nuly (prípad $a=0$ nemôže nastať, lebo by hľadané číslo nebolo trojciferné). Pozrime sa na hodnoty výrazu $b(b-10)$. Keďže b je jednociferné, $b-10$ bude vždy záporné a b je nezáporné, takže výraz $b(b-10)$ bude vždy nekladný (ak by b bolo 0, tak by sme násobili nulou a celý výraz by bol rovný nule).

Hľadáme najväčšie možné trojciferné číslo, takže chceme, aby na mieste stovák bola čo najväčšia cifra, inak povedané, aby bolo a čo najväčšie, a teda aby ľavá strana rovnice bola čo najväčšia. Keď sa pozrieme na pravú stranu rovnice, máme tam výraz obsahujúci b, o ktorom sme vyššie zistili, že bude záporný, a výraz obsahujúci c, ktorý bude vždy kladný, až na prípad $c=1$ alebo $c=0$, keď bude rovný nule. Chceme mať čo najväčšiu ľavú (a teda aj pravú) stranu rovnice, takže toto c musí byť čo najväčšie.

Keby $c=9$, $99a = b(b-10) + 9(9+1)(9-1) = b(b-10) + 9\cdot 10\cdot 8 = b(b-10) + 720$.

Keďže $99a = b(b-10) + 720$, pravá strana musí byť deliteľná 99. Najbližší menší násobok 99 k 720 je 693. Skúsme sa pozrieť, akú najmenšiu možnú hodnotu môže mať výraz s b. Čím menší je rozdiel dvoch čísel s konštantným súčtom, tým väčší bude ich súčin . Takže najmenšia hodnota výrazu $b(b-10)$ je, ak $b=5$, $5(5-10) = 5\cdot(-5) = -25$. Rozdiel $720-693$ je ale 27, takže nevieme dosadiť do rovnice celé kladné čísla tak, aby platila.

Keby $c=8$, $99a = b(b-10) + 8(8+1)(8-1) = b(b-10) + 504$.

Najbližší menší násobok 99 k 504 je 495. Rozdiel týchto dvoch čísel je 9. To nám vyhovuje, pretože rozdiel 9 vieme dostať dosadením do výrazu buď ako $1(1-10)$ alebo ako $9(9-10)$. Keďže chceme čo najväčšie číslo, použijeme $b=9$. Dosadením do rovnice dorátame a.

$$\begin{aligned} 99a &= 9(9-10) + 504 \\ 99a &= 495 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Úloha 38:

Máme 10 oštiepkov, ktoré chceme rozdeliť do piatich skupín po dva. Koľkými spôsobmi to môžeme urobiť?

Výsledok: 945

Riešenie:

Predstavme si 10 oštiepkov v rade vedľa seba (ten rad neskôr rozdelíme na dvojice). Na začiatku máme 10 možností, koho vieme dať na prvé miesto, potom už iba 9, koho na druhé (lebo jeden už je na prvom), 8 na tretie...Budeme teda mať $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$ možností ako postaviť oštiepky vedľa seba. Teraz vytvorme 5 dvojíc (1. s 2. miestom, 3. so 4. a tak ďalej). V dvojici nám nezáleží na poradí, preto sa v každej dvojici môžu zameniť a bude to stále tá istá možnosť. V každej dvojici máme 2 možné poradia, preto za každú dvojicu predelíme celkový počet možností počtom poradí v dvojici. Teda 3628800 vydelíme $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ (5 dvojíc), čím dostávame $3628800 : 32 = 113400$. Ani na poradí jednotlivých dvojíc nám nezáleží, preto doterajší počet možností predelíme počtom zoradení piatich dvojíc. Podobným postupom ako na začiatku zistíme, že takých zoradení je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (pretože na prvom mieste môže byť ktorákoľvek z 5 dvojíc, na druhom už len 4...). Finálny počet možností je teda $113400 : 120 = 945$.

Úloha 39:

Učiteľ hovorí: „Myslím si 2 kladné celé čísla väčšie než 1. Skúste uhádnuť aké.“ Prvému študentovi povie ich súčin a druhému súčet.

- Prvý: „Nepoznám súčet.“
- Druhý: „To som vedel. Súčet je menší než 14.“
- Prvý: „To som vedel. Ale teraz už čísla poznám.“
- Druhý: „Ja tiež.“

Aké to boli čísla?

Výsledok: 2 a 9

Riešenie:

Prvý študent, ktorému bol povedaný súčin, na začiatku nevie, aký je súčet. Z toho vieme, že hľadané čísla (označme ich a, b) nemôžu byť obe prvočísla, pretože inak by mal súčin iba jeden možný rozklad (napríklad 6 vieme dostať iba ako $2 \cdot 3$), a teda aj jeden súčet. Druhý študent na to odpovedal, že o tom vedel, takže vie, že súčet, ktorý mu bol povedaný, sa nedá vytvoriť súčtom dvoch prvočísel. Tiež povie, že súčet je menší ako 14. Zo zadania vieme, že obe čísla sú kladné, celé a väčšie ako 1. Takže možné súčty sú 4 až 13. Pozrime sa, ktoré z týchto súčtov vieme dostať ako súčet dvoch prvočísel (hľadáme súčet, ktorý za nedá dostať ako súčet prvočísel):

$$\begin{array}{ccccc} 4 = 2 + 2 & 5 = 2 + 3 & 6 = 3 + 3 & 7 = 2 + 5 & 8 = 3 + 5 \\ 9 = 2 + 7 & 10 = 3 + 7 & 12 = 5 + 7 & 13 = 2 + 11 & \end{array}$$

Iba 11 nevieme dostať ako súčet dvoch prvočísel, takže $a + b = 11$. Obe učiteľove čísla sú väčšie ako 1 a menšie ako 14 a ich súčet bude 11, takže to môžu byť dvojice 2 a 9, 3 a 8, 4 a 7 alebo 5 a 6.

Prvý ďalej povedal, že už vedel, že ich súčet je menší ako 14, takže súčet každých dvoch čísel, ktorých súčin dostal prvý, musí byť menší ako 14. Pozrime sa na možnosti, ktoré sme našli. $2 \cdot 9$ je 18, čo sa dá inak vyjadriť iba ako $3 \cdot 6$. Súčet 2 a 9 je 11, čo je menšie ako 14, takže to vyhovuje. Súčet 3 a 6 je 9, čo je tiež menšie ako 14, takže vyhovujú obe možnosti. $3 \cdot 8 = 24 = 2 \cdot 12$, ale $2 + 12 = 14 \geq 14$ – keby prvý počul 24, nevedel by, že súčet je menej ako 14. $4 \cdot 7 = 28 = 2 \cdot 14$, $2 + 14 = 16 \geq 14$. $5 \cdot 6 = 30 = 2 \cdot 15$, $2 + 15 = 17 \geq 14$.

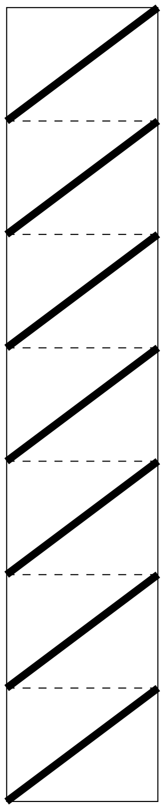
Úloha 40:

Kmeň stromu vysoký 21 metrov má obvod 4 metre. Okolo kmeňa sa ovíja liana, ktorá má až k vrcholu rovnomerne sedem celých závitov. Aká dlhá je táto liana?

Výsledok: 35 metrov

Riešenie:

Kmeň stromu je vlastne valec s obvodom podstavy 4 metre a výškou 21 metrov. Okolo tohto valca máme 7 závitov liany. Ak si rozvinieme plášť valca spolu s lianou do roviny, dostaneme toto:



Môžeme si všimnúť, že celý plášť sa dá rozdeliť na 7 zhodných častí (na obrázku sú oddelené prerušovanými čiarami). Tieto časti sú zhodné obdĺžniky, každý s jednou stranou dlhou 4 metre a druhou stranou dlhou $21 : 7 = 3$ metre. V každej časti príslušný závit liany tvorí uhlopriečku obdĺžnika. Dĺžku jedného závitu liany (L) v jednej časti teda vieme dopočítať pomocou Pytagorovej vety takto:

$$\begin{aligned} L^2 &= 3^2 + 4^2 \\ L^2 &= 9 + 16 \\ L^2 &= 25 \\ L &= 5 \end{aligned}$$

Dĺžka jedného závitu liany je 5 metrov. Aby sme dopočítali celú dĺžku liany, musíme dĺžku závitu vynásobiť počtom závitov. Dostaneme $5 \cdot 7 = 35$ metrov.

Hádanky

Hádanka 1:

Som rybár, siete však rozťahujem na suchu, chytám ryby, čo lietajú vo vzduchu.

Výsledok: pavúk

Hádanka 2:

Čo sa celý deň ťahá po zemi, ale nikdy to nie je špinavé?

Výsledok: tieň

Hádanka 3:

Nemám nohy, no prídem z dialí, nemám ruky, ale nesiem dary, nemám ústa ani hlas, predsa veľa narozprávam, keď zavítam medzi vás.

Výsledok: pošta (resp. list)

Hádanka 4:

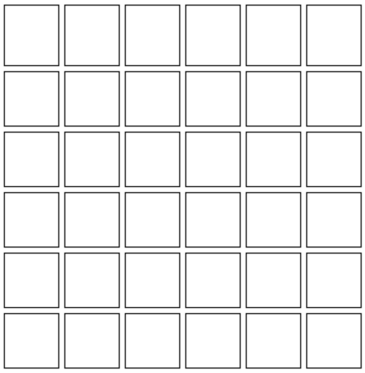
Hlavou stiera losy, na chrbte vtáka nosí.

Výsledok: minca

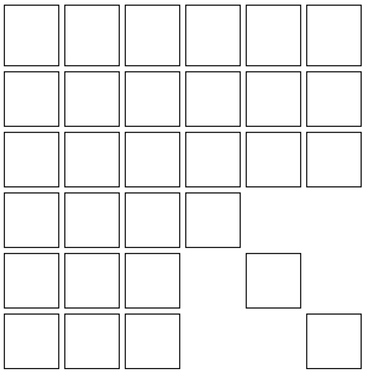
Hlavolamy

Hlavolam 1:

Kráľ Hermelín vydal svojim poddaným jasný rozkaz. Odstráňte z tabuľky 6 štvorcov tak, aby v troch stĺpcoch a troch riadkoch bolo po 6 štvorcov a v troch riadkoch a troch stĺpcoch po 4!

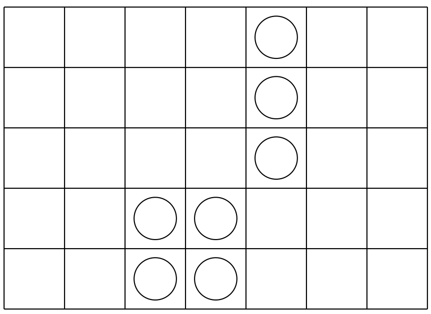


Výsledok: napríklad (úloha má viac riešení):

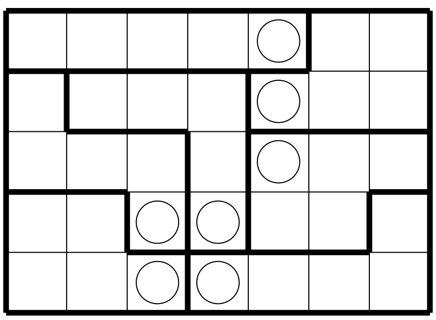


Hlavolam 2:

Rozdeľte záhradu kráľa Hermelína na 7 súvislých pozemkov (po stranách mriežky) po 5 políčok tak, aby každý pozemok mal práve jednu kráľovskú jabloň (kráľovská jabloň je na plániku vyznačená krúžkom).



Výsledok:



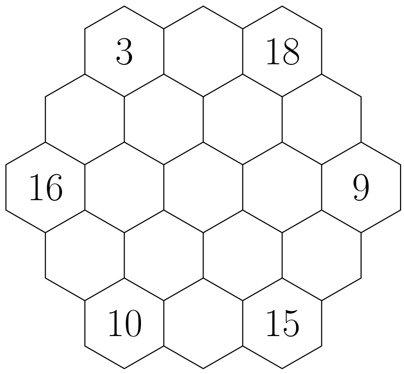
Hlavolam 3:

Ofarbite erb kráľa Hermelína, ktorý má tvar tabuľky s rozmermi 4×4, piatimi farbami tak, aby bola každá farba použitá aspoň raz a v žiadnom riadku ani stĺpci sa nevyskytovali viac ako dve rôzne farby.

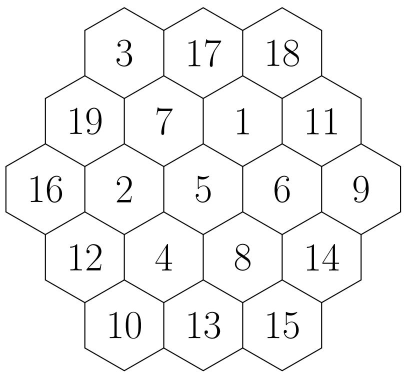
Výsledok: napríklad na jednej z uhlopriečok ofarbíme každé zo štyroch políčok inou farbou a zvyšok tabuľky vyplníme poslednou, piatou farbou

Hlavolam 4:

Kráľovský čarodejník kráľa Hermelína predstavil kráľovi magický šesťuholník. Vyplňte ho číslami od 1 po 19 tak, aby každý rad šesťuholníkov (vo všetkých šiestich smeroch) mal rovnaký súčet.



Výsledok:



Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V zime roku 2022 sa koná už 21. ročník tejto súťaže.

Trvanie súťaže je magických 99 minút. Na začiatku každý tím dostane 6 matematických úloh a 1 bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Po úspešnom vyrátaní úlohy vymení tím úlohu za novú. Po každej pätici správne vyriešených úloh tím dostane jeden bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Bonus sa odovzdáva rovnako ako úloha, ale už zaň tím nedostáva novú úlohu, iba sa mu zarátavajú body.

Tímy získavajú body podľa ročníkov súťažiacich v tíme, a to podľa nasledovnej tabuľky:

Ročník				Správny výsledok	
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	bonus
7	7	7	7	3,80	2
7	7	7	8	3,70	2
7	7	7	9	3,60	2
7	7	8	8	3,60	2
7	7	8	9	3,50	2
7	7	9	9	3,40	2
7	8	8	8	3,50	2
7	8	8	9	3,40	2
7	8	9	9	3,30	2
7	9	9	9	3,20	2
8	8	8	8	3,40	2
8	8	8	9	3,30	2
8	8	9	9	3,20	2
8	9	9	9	3,10	2
9	9	9	9	3,00	2

Zadania starších ročníkov nájdete na `matik.strom.sk/sk/lomihlav`.

názov: **Lomihlav – 9.12.2022**
vydávatelia: Združenie STROM
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta
web: `matik.strom.sk/sk/lomihlav`
`upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/`